University of Annaba–"Department of Mathematics"
Master 2 of Special Functions **2017–2018**

Finite Volume for PDEs

First Exam: 1.30

Remarque.:

- L'utilisation des Télephones portables et calculatrices est interdite
- Le presentation de la réponse est comptée sur 1.0pts

Exercice 1. Considerons le probleme suivant :

$$-u''(x) + u'(x) = f(x), \quad x \in (0,1) \tag{1}$$

avec conditions de Dirichlet non-homogene

$$u(0) = u(1) = 1. \tag{2}$$

1. Donner une formulation faible pour le probleme (1)–(2).
2. Enoncer le Lemme de Lax-Milgram puis l'utiliser pour demontrer l'existence et l'unicite de la solution faible.
3. Proposer un Schema de Differences Finies centré de trois points pour le probleme (1)–(2).
4. Enoncer le Theoreme de Lax-Richmayer en Differences Finies puis l'utiliser pour demontrer la convergence de Schema de Differences Finies que vous avez proposé.

Exercice 2. Considerons le probleme semi-lineaire suivant :

$$-u''(x) = f(x, u(x)), \quad x \in (0,1) \tag{3}$$

avec

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{4}$$

1. Donner une formulation faible pour le probleme (3)–(4) (La preuve d'existence d'une solution faible n'est pas demandée).
2. Considerons le Schema suivant de Volumes Finis, pour un $N \in \mathbb{N}^\star$ donné:
$$-\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x, u_i)dx, \quad i = 1, \dots, N \tag{5}$$
avec
$$u_0 = u_{N+1} = 0. \tag{6}$$
Notons que le schema (5)–(6) est non-lineaire.
3. Supposons que le terme source f verifie:
$$f \in L^\infty((0,1) \times \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad M = \sup_{(x,s)\in(0,1)\times\mathbb{R}} f(x,s) \tag{7}$$
4. Montrer l'inegalité suivante: pour tout $\{v_i, i = 0, \dots, N+1\}$ avec $v_0 = v_{N+1} = 0$, et pour tout $l = 0, \dots, N$
$$|v_l| \leq \left(\sum_{i=0}^{N} \frac{(v_{i+1} - v_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$
5. En utlisant cette inegalité pour montrer que toute solution de (5)–(6) verifié:
$$\left(\sum_{i=0}^{N} \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq M. \tag{9}$$
6. On admetant le cas particulier suivant du Theoreme de point fixe de Brouwer : toute application lineaire F d'un espace normé de dimension fini E vers E et qui verfie $\|F\| \leq M$ admet un point fixe U: $F(U) = U$.
On utilise ce cas particulier de Theoreme de point fixe de Brouwer, montrer l'existence d'une solution pour (5)–(6) (apres un choix convenable d'une application F qui verifié les hypotheses cités avant).