Ecole Nationale Supérieure des Mines et de la Métallurgie (ENSMM)–Annaba
Module Analyse II
2016–2017

First revision: Functions with several variables, Series, and Sequences of Functions

Last update: Monday Nov. 28, 2016

1 Functions with several variables

Exercice 1. Representer graphiquement les ensembles de points suivants:

1. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq 0 \quad \text{et} \quad y \geq x\} \tag{1}$$
2. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x + y - 1 \geq 0\} \tag{2}$$
3. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x + y - 1 \geq 0 \quad \text{et} \quad x \geq 0 \quad \text{et} \quad y \leq 1\} \tag{3}$$
4. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 \leq 1\} \tag{4}$$
5. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \tag{5}$$
6. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x + y - 1 \geq 0 \quad \text{et} \quad x + 2y + 1 \geq 0 \quad \text{et} \quad y \leq 1\} \tag{6}$$

Exercice 2. Determiner les domaines de definition des fonctions suivantes et les representer graphiquement:

$$1.\ f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad 2.\ f(x,y) = \sqrt{xy}, \quad 3.\ f(x,y) = \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right), \quad 4.\ f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2 - y}{y}}.$$

Exercice 3. Calculer les limites suivantes si elles existent ou montrer quelles nexistent pas :

$$1.\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x - y}, \quad 2.\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad 3.\ \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{\sin(x - y)}{\sqrt{|x - y|}},$$
$$4.\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \exp - \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad 5.\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{|x - y|}}, \quad 6.\ \lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{4y^2 - x^2}{(x - 2y)^3}.$$

Exercice 4. (Relation entre la limite et la limite en coordonnées polaires) Soit f une fonction a valeurs réelles définie sur une partie ouverte $\mathcal{D}$ (ceci va nous permettre de definir la limite a n'importe quel point de $\mathcal{D}$) de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$. En utlisant la définition de la limite, prouver que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$ est equivalent a $\lim_{r\to 0} \sup_{\theta\in[0,2\pi[} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) = l$.

Exercice 5. Trouver les derivees partielles d'ordre 2 au point $(0,0)$ pour les fonctions suivantes:

1.
$$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0),$$
$$f(0,0) = 0.$$

2.
$$f(x,y) = x^2 \arctan\frac{y}{x} - y^2 \arctan\frac{x}{y}, \quad x \neq 0, y \neq 0$$
$$f(x,y) = 0, \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad y \neq 0.$$

Exercice 6. Considérons la fonction f definee par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \ (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{7}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
2. Calculer derivées partielles d'ordre un f. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 7. Considerons

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \ (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{8}$$

1. Calculer les derivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ pour $(x_0,y_0) \neq (0,0)$.
2. Calculer les derivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Exercice 8. Soit f une fonction a valuers reelles et differentiable sur $\mathbb{R}^2$. la fonction f est dite homogène de degré k si pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda > 0$, on a
$$f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda^k f(\boldsymbol{x}).$$

1. Soit $\alpha > 0$ donnée. Verifier que la fonction suivante est homogène de degré 1 (un):
$$f(x,y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$$
2. Montrer que toute fonction f homogène de degré k, elle verifié
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = kf(x,y).$$

Exercice 9. Soit f une fonction a valuers reelles et de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Considerons la fonction h definie par:

$$h(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Montrer l'identité suivante:

$$f_{xx} + f_{yy} = h_{rr} + \frac{1}{r^2}h_{\theta\theta} + \frac{1}{r}h_r. \tag{9}$$

Exercice 10. Soit $p \in \mathbb{N}$ et considérons la fonction f definee par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^p \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \ (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{10}$$

1. Disculter suivant les valeurs de p la continuité et la differentiabilié de f.
2. Pour quelle valeur de p, la fonction f de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 11. Même questions de l'exercice precedent pour la fonction suivante (utliser deux methodes differentes)

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^p\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0,\ (x,y)=(0,0).\end{cases} \tag{11}$$

Exercice 12. Considérons la fonction F definee par

$$F(x,y)=\max(x^2,y^2,xy). \tag{12}$$

1. La fonction F est-elle differentiable au point $(0,0)$. ?
2. Soit $a>0$. Montrer que F n'admet pas des derivees partielles au point (a,a).

Exercice 13. Soit $p>0$ et considérons la fonction F definee par

$$F(x,y)=|xy|^p. \tag{13}$$

1. Calculer les derivees partielles au point $(0,0)$.
2. Pour quelle valeur de p, la fonction F est differentiable au point $(0,0)$?

2 Les séries numériques

Exercice 14. Determiner la nature des series dont les termes generaux sont

$$1.\ U_n=\exp\left(an^2\right)\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n^3},\quad 2.\ U_n=\sqrt[n^2]{n}-1,\quad 3.\ U_n=(1-\cos 1n)\sqrt{\ln n},\quad 4.\ U_n=\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}.$$

Exercice 15. Calculer la somme des sries dont le terme general u_n est donné par

$$\begin{gathered}1.\ U_n=\ln\frac{n(n+2)}{(n+1)^2},\ \ n\geq 1.\quad 2.\ U_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)},\ \ n\geq 0.\quad 3.\ U_n=\frac{5^n}{8^{n-3}},\ \ n\geq 3.\\ 4.\ U_n=\ln\left(1+x^{2^n}\right),\ \ n\geq 0,\ \ 0<x<1.\quad 5.\ U_n=\frac{1}{(3n+1)(3n+4)},\ \ n\geq 0..\end{gathered} \tag{14}$$

Exercice 16. En utilisant une comaraison avec une serie geometrique, determiner la nature des series dont les termes generaux sont

$$\begin{aligned}1.\,U_n &= \frac{3^n+n^4}{5^n+7^n}\ \ 2.\ U_n=\frac{\cosh(2n)}{\cosh(3n)}\ \ 3.\ U_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)^n\ \ 4.\ U_n=\tanh(n+a)-\tanh(n)\\ &\quad 5.\ U_n=\frac{1}{1+x^{2n}},\quad 6.\ U_n=\left(3+(-1)^n\right)^{-n}.\end{aligned} \tag{15}$$

Exercice 17. En utilisant une comparaison avec une serie de Riemann, determiner la nature des series dont les termes generaux sont

$$\begin{aligned}1.\,U_n &= 1-\cos\frac{1}{n},\ \ 2.\ U_n=\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}}-1,\ \ 3.\ U_n=n^{-1-\frac{2}{n}},\ \ 4.\ U_n=\exp\left(\cos\frac{1}{n}\right)-\exp\left(\cos\frac{2}{n}\right).\ \ 5.\ U_n=x^{\ln n}\\ &\quad 5.\ U_n=n^2a^{\sqrt{n}},\ \ a>0.\end{aligned} \tag{16}$$

Exercice 18. En utilisant les regles de Cauchy et Alembert, determiner la nature des series dont les termes generaux sont

$$
\begin{aligned}
1. U_n &= \frac{n!}{a^n},\ \ 2.\ U_n = \frac{n!}{n^n},\ \ 3.\ U_n = \frac{a^n}{n^a},\ \ 4.\ U_n = \left(a + \frac{1}{n}\right)^n.\ \ 5.\ U_n = \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)} \\
&5.\ U_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n^2}\ \ 6.\ U_n = \left(\frac{\sin^2 n}{n}\right)^n.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Exercice 19. En utilisant une comparaison avec une serie de Bertrand, determiner la nature des series dont les termes generaux sont

$$1. U_n = \left(1 - \exp\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\sqrt{\ln n},\ \ 2.\ U_n = \frac{1}{\ln n!},\ \ 3.\ U_n = n^{n^{-a}} - 1,\ a > 0.$$

Exercice 20. Determiner la nature des series dont les termes generaux sont

$$1.\quad U_n = \left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-n^3},\quad 2.\quad U_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!},\quad 3.\quad U_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}},\quad 4.\quad U_n = \frac{n^4}{n^5-1},\quad 5.\quad U_n = \frac{1}{\ln^n n}$$

$$6.\quad U_n = \frac{1}{(\ln^n)^{\ln n}},\quad 7.\quad U_n = \frac{1}{\ln(n^2+n+1)},\quad 8.\quad U_n = \frac{n^3}{(1+\alpha)^n},\ \ \alpha > -1,,\quad 9.\quad U_n = \frac{1+2+\dots+n}{1^2+2^2+\dots+n^2}$$

$$10.\ U_n = \frac{a^n+1}{a^{2n}+n},\quad 11.\ U_n = 2^{-\sqrt{n}},\quad 12.\ U_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+3)}},\quad 13.\ U_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \exp\left(\frac{1}{n+a}\right),\ a > 0.$$

Exercice 21. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle contenant 0. Etudier la nature de la serie dont le terme general est

$$U_n = f(\frac{1}{n}) + f(-\frac{1}{n}) - 2f(0). \tag{18}$$

Exercice 22. Determiner l'ensemble des (a,b,c) pour lesquelles la serie dont le terme general suivant est convergente

$$U_n = \frac{1}{an+b} - \frac{c}{n}. \tag{19}$$

Exercice 23. En utilisant les criteres d'Abel et Leibnitz, determiner la nature des series dont les termes generaux sont

$$
\begin{aligned}
1.\quad &\frac{(-1)^n}{n}\arctan\frac{1}{n},\ \ 2.\ \sin\pi\left(n + \frac{a}{n}\right),\ \ 3.\ \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}(a \neq 0),\ \ 4.\ \frac{\cos(an+b)}{n^\alpha},\ \alpha > 0 \text{ et } a \notin 2\pi\mathbb{Z} \\
&5.\ \frac{(-1)^n}{n + 2\sin n},\ \ 6.\ (-1)^n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right),\ \ 7.\ \ln\left(1 + \frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right),\ \ 8.\ \frac{\sin 2n}{n^2-n+1}.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

3 Suites de fonctions

Exercice 24. Considerons la suite de fonctions $(f_n)_n$ definies par:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx},\quad x \in [0,1]. \tag{21}$$

1. Tracer sommairement les courbes de f_1, f_2, et de f_3.
2. Verifier que la suite f_n converge simplement vers une fonction f a determiner.
3. Cette convergence est-elle uniforme ?
4. donner quelques ensembles ou la convergence est uniforme.

Exercice 25. Considerons la suite de fonctions $(f_n)_n$ definies par:

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx},\quad x \in [0,1]. \tag{22}$$

1. Montrer que f_n converge uniformement vers la fonction nulle notée par f..
2. Verifier par les calcules que nous avons bien:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx. \tag{23}$$

Exercice 26. Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes sur l'ensemble I

1. $$f_n(x) = \frac{x}{x+n}, \quad I=[0,1], \quad I=[0,+\infty[. \tag{24}$$
2. $$f_n(x) = \frac{nx}{1+x^2n^2}, \quad I=\mathbb{R}. \tag{25}$$
3. $$f_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2}, \quad I=\mathbb{R}. \tag{26}$$
4. $$f_n(x) = \frac{n(x^3+x)\exp(-x)}{1+nx}, \quad I=[0,1]. \tag{27}$$
5. $$f_n(x) = \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}, \quad I=\mathbb{R}, \quad I=]1,+\infty[, \quad I=[a,+\infty[, a>1. \tag{28}$$
6. $$f_n(x) = \frac{\sin^{2n}x-1}{\sin^{2n}x+1}, \quad I=\mathbb{R}. \tag{29}$$
7. $$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(nx)}{n\sin x}, \ x\in]-\pi,\pi[\setminus\{0\} \\ 0, \ x=0. \end{cases} \tag{30}$$
8. $$f_n(x) = \begin{cases} 0, \ x\in\mathbb{R}\setminus\{n\} \\ n^3, \ x=n. \end{cases} \tag{31}$$
9. Sur $[0,1]$ et puis sur $[0,a]$ avec $0<a<1$
$$f_n(x) = n(x^n - x^{n+1}) \tag{32}$$
10. Sur $\mathbb{R}^+$
$$f_n(x) = n^a x\exp(-nx), \quad a>0. \tag{33}$$
11. Sur $\mathbb{R}$
$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}, \qquad f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}, \qquad f_n(x) = x\arctan(nx). \tag{34}$$
12. Sur $[0,+\infty|$ et puis sur $[a,+\infty|$ avec $0<a$
$$f_n(x) = \sin\left(\frac{\pi+n^2x^2}{1+n^2x}\right) \tag{35}$$

Exercice 27. Considerons la suite de fonctions $(f_n)_n$ definies par:

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1+n2^nx^2}, \quad x\in[0,1]. \tag{36}$$

1. Montrer que f_n converge simplement vers une fonction notée par f.
2. Comparer
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(x)dx. \tag{37}$$
En deduire que la convergence de f_n n'est pas uniforme.

Exercice 28. Considerons la suite de fonctions $(f_n)_n$ definies par:

$$f_n(x) = \frac{x^n + n^x}{x^{2n} + n^{2x}}, \quad x \in [0, +\infty[. \tag{38}$$

1. Montrer que f_n converge simplement vers une fonction notée par f.
2. At-on la convergence unifome sur $[0, +\infty[$?
3. Montrer l'inegalité suivante, pour tout $\alpha, \beta > 0$:
$$\frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 + \beta^2} \leq \frac{2}{\alpha + \beta}. \tag{39}$$
4. Utliser l'inegalité (39) pour montrer la convergence uniforme sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 29. Considerons la suite de fonctions $(f_n)_n$ definies par:

$$f_n(x) = x \sqrt[2n+1]{x}, \quad x \in [-1, 1]. \tag{40}$$

1. Justifier que f_n converge simplement vers une fonction f a determiner.
2. Montrer la convergence unifome de f_n vers f.
3. En deduire la limite de la suite $U_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} f_n(x)dx$.

Exercice 30. Considerons la suite de fonctions $(f_n)_n$ definies sur $[0, 1]$ et verifié la relation reccurente suivante:

$$f_{n+1} = 1 - \frac{1}{4}(f_n)^2, \tag{41}$$

avec

$$f_0(x) = x, \quad x \in [0, 1]. \tag{42}$$

1. Justifier que f_n converge simplement vers une fonction constante f a determiner.
2. Montrer que:
$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall x \in [0, 1].$$
3. En deuire la convergence unifome de f_n vers f.

Exercice 31. Soit u_n une suite de limite u et $v_n > 0$ une suite de limite $v > 0$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ definies sur $[0, +\infty[$ et verifié la relation reccurente suivante converge uniformement sur $[0, +\infty[$:

$$f_{n+1}(x) = \frac{x + u_n}{x + v_n}. \tag{43}$$

Exercice 32. Soit f_n une suite de fonction converge uniformement vers f sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est bornée, alors $\exp(f_n)$ converge uniformement vers $\exp(f)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Donner un contre exemple si f n'est pas bornée.

Exercice 33. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$ et φ_n une suite de fonctions continues sur $[0, 1]$ qui verifiée les deux proprietés suivantes:

1. La suite φ_n est bornée (rappelons que pour chaque n, la fonction φ_n est continue sur le compact $[0, 1]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes, i.e. existe $M_n > 0$ tel que $\max_{x \in [0,1]} |\varphi_n(x)| \leq M_n$), existe $M > 0$ telle que:
$$|\varphi_n(x)| \leq M, \quad \forall x \in [0, 1].$$
2. Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, φ_n converge uniformement sur $[\alpha, 1]$

Montrer que le suite de fonctions $f\varphi_n$ converge uniformement sur $[0, 1]$.

Exercice 34. Considerons la suite de fonctions

$$f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}[.$$

Etudier la convergence et uniforme.

4 Series des fonctions

Exercice 35. Considerons la serie de fonctions definie par:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-nx)\sin(nx)}{\ln(1+n)}. \tag{44}$$

1. Etudier la convergence simple de cette serie sur $[0,+\infty[$.
2. Etudier la convergence uniforme de cette serie sur $[a,+\infty[$, avec $a>0$.

Exercice 36. Considerons la serie de fonctions definie par:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}. \tag{45}$$

1. Montrer que cette serie converge vers une fonction notée f pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que f est continue.
3. Montrer que

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 37. Considerons la serie de fonctions definie par:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}. \tag{46}$$

1. Montrer que cette serie converge uniformement sur $[-1,1]$.
2. Montrer que cette serie converge normallement sur $[0,1]$ mais pas sur $[-1,0]$

Exercice 38. Considerons la serie de fonctions definie par:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}. \tag{47}$$

1. Montrer que cette serie converge vers une fonction notée f pour tout $x \in]1,+\infty[$.
2. Montrer que f est continue.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
4. Expliquer pour quoi f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$.
5. Montrer qule $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.

Exercice 39. Montrer que la fonction suivante est continue sur $]0,\pi[$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \sin^n x}. \tag{48}$$

Exercice 40. Montrer que la series suivantes est uniformement convergente sur $[-1,1]$ (Utliser le fait que $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.):

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+x^n}. \tag{49}$$

Exercice 41.

1. Montrer que la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n(n+1)}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Soit $S(x)$ sa somme.
2. Calculer $S(0)$.

Exercice 42. Etudier la convergence Simple, Absolue, Uniforme, Normale) des series suivantes

1. $$\sum_{n\geq 1} \sqrt{n}x \exp\left(-n^2 x\right), \quad \mathbb{R}^+.$$
2. $$\sum_{n\geq 1} x^n \left(\ln x\right)^2, \quad [0,1].$$
3. $$\sum_{n\geq 1} \frac{x}{n} \exp\left(-n^2 x^2\right), \quad [0,+\infty[.$$
4. $$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 + n^4 x^2}, \quad \mathbb{R}^+.$$