Ecole Nationale Supérieure des Mines et de la Métallurgie (ENSMM)–Annaba
Module Analyse II
2016–2017

Home work on Limits, Continuity, and Differentiability of Functions with several variables

Exercice 1. Representer graphiquement les ensembles de points suivants:

1.
$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad x\geq 0 \quad \text{et} \quad y\geq x\} \tag{1}$$

2.
$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad x+y-1\geq 0\} \tag{2}$$

3.
$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad x+y-1\geq 0 \quad \text{et} \quad x\geq 0 \quad \text{et} \quad y\leq 1\} \tag{3}$$

4.
$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad x^2+y^2\leq 1\} \tag{4}$$

5.
$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad 1\leq x^2+y^2\leq 4\} \tag{5}$$

6.
$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad x+y-1\geq 0 \quad \text{et} \quad x+2y+1\geq 0 \quad \text{et} \quad y\leq 1\} \tag{6}$$

Exercice 2. Determiner les domaines de definition des fonctions suivantes et les representer graphiquement:

$$1.\ f(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x},\quad 2.\ f(x,y)=\sqrt{xy},\quad 3.\ f(x,y)=\ln\left(1+\frac{x}{y}\right),\quad 4.\ f(x,y)=\sqrt{\frac{x^2-y}{y}}.$$

Exercice 3. Calculer les limites suivantes si elles existent ou montrer quelles nexistent pas :

$$1.\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-y^3}{x-y},\quad 2.\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}},\quad 3.\ \lim_{(x,y)\to(2,2)}\frac{\sin(x-y)}{\sqrt{|x-y|}},$$
$$4.\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\exp-\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),\quad 5.\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(1/x)}{\sqrt{|x-y|}},\quad 6.\ \lim_{(x,y)\to(2,1)}\frac{4y^2-x^2}{(x-2y)^3}.$$

Exercice 4. (Relation entre la limite et la limite en coordonnées polaires) Soit f une fonction a valeurs réelles définie sur une partie ouverte $\mathcal{D}$ (ceci va nous permettre de definir la limite a n'importe quel point de $\mathcal{D}$) de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0,y_0)\in\mathcal{D}$. En utlisant la définition de la limite, prouver que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=l$ est equivalent a $\lim_{r\to 0}\sup_{\theta\in[0,2\pi[} f(x_0+r\cos\theta, y_0+r\sin\theta)=l$.

Exercice 5. Trouver les derivees partielles d'ordre 2 au point $(0,0)$ pour les fonctions suivantes:

1.
$$f(x,y)=\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2},\quad (x,y)\neq(0,0),$$

$$f(0,0)=0.$$

2.
$$f(x,y) = x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}, \quad x \neq 0, y \neq 0$$

$$f(x,y) = 0, \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad y \neq 0.$$

Exercice 6. Considérons la fonction f definee par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \ (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{7}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
2. Calculer derivées partielles d'ordre un f. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 7. Considerons

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \ (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{8}$$

1. Calculer les derivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ pour $(x_0,y_0) \neq (0,0)$.
2. Calculer les derivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Exercice 8. Soit f une fonction a valuers reelles et differentiable sur $\mathbb{R}^2$. la fonction f est dite homogène de degré k si pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda > 0$, on a
$$f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda^k f(\boldsymbol{x}).$$

1. Soit $\alpha > 0$ donnée. Verifier que la fonction suivante est homogène de degré 1 (un):
$$f(x,y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$$
2. Montrer que toute fonction f homogène de degré k, elle verifié
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = kf(x,y).$$

Exercice 9. Soit f une fonction a valuers reelles et de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Considerons la fonction h definie par:

$$h(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Montrer l'identité suivante:

$$f_{xx} + f_{yy} = h_{rr} + \frac{1}{r^2}h_{\theta\theta} + \frac{1}{r}h_r. \tag{9}$$