Ecole Préparatoire aux Sciences et Techniques (EPST)–Annaba
Module Analyse II
2015–2016

Série sur les Integrales Generalisees Dependant d'un Parametre

Last update: Saturday June 4th, 2016

Provisional home page: `http://www.cmi.univ-mrs.fr/~bradji`

Exercice 1. Soit f la fonction definie par

$$f(x) = \int_{x}^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}. \tag{1}$$

1. Determiner le domaine de definition de f.
2. Etudier la continuite et la derivabilite de f.
3. Etudier la parite de f.
4. A l'aide d'un encadrement convenable, calculer $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Exercice 2. Soit F la fonction definie par

$$F(x) = \int_{0}^{x} \exp\left(-(x^2 - t^2)\right) dt. \tag{2}$$

1. Justifier que F est developpable en serie entiere sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la parite de F.
3. Justifier que F est derivable sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que F est solution d'une equation differentielle lineaire d'ordre un.
5. Developper F en serie entiere et deduire que

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{(2k+1)k!} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!}. \tag{3}$$

Exercice 3. Soit F la fonction definie par

$$F(x) = \int_{0}^{1} \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} \ln\left(\frac{1+tx}{1-tx}\right) dt. \tag{4}$$

1. Montrer que F est definie pour tout x tel que $|x| < 1$.
2. Etudier la parite de F.
3. Justifier que F est derivable sur $\mathbb{R}$.
4. Etudier la continuite et la derivabilite de F.

Exercice 4.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'integrale $\int_{0}^{+\infty} t^n \exp(-t)dt$ converge. En deduire que pour tout polynome P, l'integrale $\int_{0}^{+\infty} P(t)\exp(-t)dt$ converge
2. Montrer que l'integrale $\int_{0}^{+\infty} t^{x-1}\exp(-t)dt$ converge si et seulement si $x > 0$.
3. Definissons la fonction Γ sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $\Gamma(x) = \int_{0}^{+\infty} t^{x-1}\exp(-t)dt$.

(a) Demontrer la relation :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

En deduire

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

(b) En supposant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$.

(c) Suivant la parite de n, calculer $\Gamma(\frac{n}{2})$.

RAPPEL

Soit $(x,t) \mapsto \varphi(x,t)$ une fonction definie sur $(x,t) \in D = I \times [a,b[$ (singularite en b). Si de plus

1. φ est continue sur D.
2. Existe une fonction g definie sur $[a,b[$ telle que:

$$|\varphi(x,t)| \leq g(t), \ \ \forall (x,t) \in D$$

et

$$\int_a^b g(t)dt < \infty.$$

Alors $F(x) = \displaystyle\int_a^b \varphi(x,t)dt$ est continue pour tout $x \in I$.