Ecole Nationale Supérieure des Mines et de la Métallurgie (ENSMM)–Annaba
Module Analyse II
2016–2017

Sequences of Functions

Not finished yet. Last update: Wednesday Nov. 16, 2016

Exercice 1. Considerons la suite de fonctions $(f_n)_n$ definies par:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}, \quad x \in [0,1]. \tag{1}$$

1. Tracer sommairement les courbes de f_1, f_2, et de f_3.
2. Verifier que la suite f_n converge simplement vers une fonction f a determiner.
3. Cette convergence est-elle uniforme ?
4. donner quelques ensembles ou la convergence est uniforme.

Exercice 2. Considerons la suite de fonctions $(f_n)_n$ definies par:

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx}, \quad x \in [0,1]. \tag{2}$$

1. Montrer que f_n converge uniformement vers la fonction nulle notée par f..
2. Verifier par les calcules que nous avons bien:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx. \tag{3}$$

Exercice 3. Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes sur l'ensemble I

1. $$f_n(x) = \frac{x}{x+n}, \quad I = [0,1], \quad I = [0,+\infty[. \tag{4}$$
2. $$f_n(x) = \frac{nx}{1+x^2n^2}, \quad I = \mathbb{R}. \tag{5}$$
3. $$f_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2}, \quad I = \mathbb{R}. \tag{6}$$
4. $$f_n(x) = \frac{n(x^3+x)\exp(-x)}{1+nx}, \quad I = [0,1]. \tag{7}$$
5. $$f_n(x) = \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}, \quad I = \mathbb{R}, \quad I =]1,+\infty[, \quad I = [a,+\infty[, a > 1. \tag{8}$$
6. $$f_n(x) = \frac{\sin^{2n} x - 1}{\sin^{2n} x + 1}, \quad I = \mathbb{R}. \tag{9}$$
7. $$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(nx)}{n \sin x}, \ x \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\} \\ 0, \ x = 0. \end{cases} \tag{10}$$
8. $$f_n(x) = \begin{cases} 0, \ x \in \mathbb{R}\setminus\{n\} \\ n^3, \ x = n. \end{cases} \tag{11}$$

9. Sur $[0,1]$ et puis sur $[0,a]$ avec $0<a<1$

$$f_n(x)=n(x^n-x^{n+1}) \tag{12}$$

10. Sur $\mathbb{R}^+$

$$f_n(x)=n^a x\exp(-nx), \quad a>0. \tag{13}$$

11. Sur $\mathbb{R}$

$$f_n(x)=\frac{x}{1+nx^2}, \qquad f_n(x)=\frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}, \qquad f_n(x)=x\arctan(nx). \tag{14}$$

12. Sur $[0,+\infty|$ et puis sur $[a,+\infty|$ avec $0<a$

$$f_n(x)=\sin\left(\frac{\pi+n^2x^2}{1+n^2x}\right) \tag{15}$$

Exercice 4. Considerons la suite de fonctions $(f_n)_n$ definies par:

$$f_n(x)=\frac{2^nx}{1+n2^nx^2}, \quad x\in[0,1]. \tag{16}$$

1. Montrer que f_n converge simplement vers une fonction notée par f.
2. Comparer

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(x)dx. \tag{17}$$

   En deduire que la convergence de f_n n'est pas uniforme.

Exercice 5. Considerons la suite de fonctions $(f_n)_n$ definies par:

$$f_n(x)=\frac{x^n+n^x}{x^{2n}+n^{2x}}, \quad x\in[0,+\infty[. \tag{18}$$

1. Montrer que f_n converge simplement vers une fonction notée par f.
2. At-on la convergence unifome sur $[0,+\infty[$?
3. Montrer l'inegalité suivante, pour tout $\alpha,\beta>0$:

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2}\le\frac{2}{\alpha+\beta}. \tag{19}$$

4. Utliser l'inegalité (19) pour montrer la convergence uniforme sur tout intervalle $[a,+\infty[$ avec $a>0$.

Exercice 6. Considerons la suite de fonctions $(f_n)_n$ definies par:

$$f_n(x)=x\ \sqrt[2n+1]{x}, \quad x\in[-1,1]. \tag{20}$$

1. Justifier que f_n converge simplement vers une fonction f a determiner.
2. Montrer la convergence unifome de f_n vers f.
3. En deduire la limite de la suite $U_n=\displaystyle\int_{-1}^1 f_n(x)dx$.

Exercice 7. Considerons la suite de fonctions $(f_n)_n$ definies sur $[0,1]$ et verifié la relation reccurente suivante:

$$f_{n+1}=1-\frac{1}{4}(f_n)^2, \tag{21}$$

avec

$$f_0(x)=x, \quad x\in[0,1]. \tag{22}$$

1. Justifier que f_n converge simplement vers une fonction constante f a determiner.

2. Montrer que:
$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall x \in [0,1].$$
3. En deuire la convergence unifome de f_n vers f.

Exercice 8. Soit u_n une suite de limite u et $v_n > 0$ une suite de limite $v > 0$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ definies sur $[0, +\infty[$ et verifié la relation reccurente suivante converge uniformement sur $[0, +\infty[$:
$$f_{n+1}(x) = \frac{x + u_n}{x + v_n}. \tag{23}$$

Exercice 9. Soit f_n une suite de fonction converge uniformement vers f sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est bornée, alors $\exp(f_n)$ converge uniformement vers $\exp(f)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Donner un contre exemple si f n'est pas bornée.

Exercice 10. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$ et φ_n une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ qui verifiée les deux proprietés suivantes:

1. La suite φ_n est bornée (rappelons que pour chaque n, la fonction φ_n est continue sur le compact $[0,1]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes, i.e. existe $M_n > 0$ tel que $\max\limits_{x \in [0,1]} |\varphi_n(x)| \leq M_n$), existe $M > 0$ telle que:
$$|\varphi_n(x)| \leq M, \quad \forall x \in [0,1].$$
2. Pour tout $\alpha \in]0,1[$, φ_n converge uniformement sur $[\alpha, 1]$

Montrer que le suite de fonctions $f\varphi_n$ converge uniformement sur $[0,1]$.