Ecole Nationale Supérieure des Mines et de la Métallurgie (ENSMM)–Annaba
Module Analyse II
2016–2017

Series of Functions

Last update: Tuesday Nov. 29, 2016

Exercice 1. Considerons la serie de fonctions definie par:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-nx)\sin(nx)}{\ln(1+n)}. \tag{1}$$

1. Etudier la convergence simple de cette serie sur $[0, +\infty[$.
2. Etudier la convergence uniforme de cette serie sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.

Exercice 2. Considerons la serie de fonctions definie par:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}. \tag{2}$$

1. Montrer que cette serie converge vers une fonction notée f pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que f est continue.
3. Montrer que

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 3. Montrer que la serie de terme general $\frac{(-1)^n}{n+x^n}$ converge uniformement sur $[-1, 1]$.

Exercice 4. Considerons la serie de fonctions definie par:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}. \tag{3}$$

1. Montrer que cette serie converge uniformement sur $[-1, 1]$.
2. Montrer que cette serie converge normallement sur $[0, 1]$ mais pas sur $[-1, 0]$

Exercice 5. Considerons la serie de fonctions definie par:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}. \tag{4}$$

1. Montrer que cette serie converge vers une fonction notée f pour tout $x \in]1, +\infty[$.
2. Montrer que f est continue.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
4. Expliquer pour quoi f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

5. Montrer qule $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.

Exercice 6. Montrer que la fonction suivante est continue sur $]0, \pi[$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \sin^n x}. \tag{5}$$

Exercice 7. Montrer que la series suivantes est uniformement convergente sur $[-1, 1]$ (Utliser le fait que $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.):

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n + x^n}. \tag{6}$$

Exercice 8.

1. Montrer que la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n(n+1)}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Soit $S(x)$ sa somme.
2. Calculer $S(0)$.

Exercice 9. Etudier la convergence Simple, Absolue, Uniforme, Normale) des series suivantes

1. $$\sum_{n\geq 1} \sqrt{n} x \exp\left(-n^2 x\right), \quad \mathbb{R}^+.$$
2. $$\sum_{n\geq 1} x^n \left(\ln x\right)^2, \quad [0, 1].$$
3. $$\sum_{n\geq 1} \frac{x}{n} \exp\left(-n^2 x^2\right), \quad [0, +\infty[.$$
4. $$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 + n^4 x^2}, \quad \mathbb{R}^+.$$