

Série 1: Les Séries numériques

Exercice 1. Au moyens de leur sommes partielles, etudier la nature des series suivantes et calculer leur sommes si elles existent:

$$1) \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-1)n(n+1)} \quad 2) \sum_{n \geq 1} (2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \quad 3) \sum_{n \geq 2} \left(\int_0^1 (1 - \sqrt{x})^n dx \right)$$

$$4) \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+a)(n+a+1)(n+a+2)},$$

avec $a > 0$.

Exercice 2. Etudier les series suivantes dont le terme general est:

1. En utilisant la condition necessaire de convergence

$$1) \sqrt{n^2 + n} - n \quad 2) \arcsin \frac{n^3 + 1}{n^3 + 2} \quad 3) (\ln \alpha)^{\ln n} (\alpha \geq e) \quad 4) (-1)^n \quad (1)$$

2. En utilisant le critere de Cauchy ou d' Alembert

$$1) \frac{(n+1)(n+2) \dots (2n)}{(2n)^n} \quad 2) \left(\frac{n^2 - 5n + 1}{n^2 - 4n + 2} \right)^{n^2} \quad 3) \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \quad 4) \frac{n!}{2^n + 1} \quad (2)$$

3. En utilisant les Théorèmes de Comparaison et d'équivalence

$$1) \ln \frac{2 + n^\alpha}{1 + n^\alpha} (\alpha > 0) \quad 2) \sqrt{\frac{n-1}{n^4 + 1}} \quad 3) \frac{1}{n^{1 + \frac{1}{n}}} \quad 4) \frac{3^n - n^3}{5^n - 2^n} \quad 5) \sin^2 \left(\pi \left(n + \frac{1}{n} \right) \right) \quad (3)$$

4. En utilisant le critere integral

$$1) \frac{1}{n \ln n} \quad 2) \frac{1}{n \ln^2 n}. \quad (4)$$

Exercice 3. Montrer que la serie de Bertrand $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice 4. Etudier la convergence, semi-convergence, et convergence absolue des series suivantes dont le terme general est:

1.
$$\frac{(-1)^n}{\ln n}. \quad (5)$$

2.
$$(-1)^n \sin \frac{1}{n}. \quad (6)$$

3.
$$(-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}. \quad (7)$$

4.
$$\sin \left(\frac{\pi n^2}{n+1} \right). \quad (8)$$

Exercice 5. Etudier les series suivantes dont le terme general est:

$$\frac{\sqrt{n}}{n^4 + 1}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}, \frac{3^n + 7^{2n}}{\ln^2 n + 8^{2n} + n^3}, \frac{\lambda^n}{\lambda^{2n} + \lambda^n + 1} (\lambda > 0), \frac{2^n}{n^2} (\sin \alpha)^{2n}, \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^{\frac{1}{3}}} dx, n^{\frac{1}{n}} - 1,$$
$$n^{\frac{1}{n}} - e, \left(\cosh \frac{1}{n}\right)^{-n^3}, (\ln n)^{\ln n}, \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{\ln n}}$$