**Ecole Préparatoire aux Sciences et Techniques (EPST)–Annaba**
**Module Analyse II**
**2015–2016**

## Solution de la Série des Transformées Laplace et Foaurier

Last update: Saturday June 4th, 2016

Provisional home page: `http://www.cmi.univ-mrs.fr/~bradji`

### Exercice 1.

1. Determiner la transformée de Fourier de la fonction suivante:

$$f(x) = 1, \quad |x| \le a, \tag{1}$$

   et

$$f(x) = 0, \quad |x| > a. \tag{2}$$

2. En utilisant le résultat obtenu pour evaluer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha a)\cos(ax)}{\alpha} d\alpha \tag{3}$$

   et

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt. \tag{4}$$

### Solution Exercice

1. Notons par $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ la transformee de Fourier de $f$. Comme $f$ est paire, on a

$$\begin{aligned} \hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-i\alpha t)dt = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\cos(\alpha t)dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{a} \cos(\alpha t)dt. \end{aligned} \tag{5}$$

   Par consequent

$$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(\alpha a)}{\alpha}. \tag{6}$$

2. Notons par $\mathcal{F}_c^{-1}$ la transformee inverse cosinus de Fourier. Donc

$$\mathcal{F}_c^{-1}(\hat{f})(t) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-a, a\} \tag{7}$$

   et

$$\mathcal{F}_c^{-1}(\hat{f})(t) = \frac{1}{2}, \quad \forall t \in \{-a, a\}. \tag{8}$$

   Ceci donne

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \hat{f}(\alpha)\cos(\alpha t)d\alpha = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-a, a\} \tag{9}$$

   et

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \hat{f}(\alpha)\cos(\alpha t)d\alpha = \frac{1}{2}, \quad \forall t \in \{-a, a\} \tag{10}$$

   On remplace $\hat{f}$ par l'expression obtenu dans (6) pour trouver

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha a)\cos(\alpha t)}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2} f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-a, a\} \tag{11}$$

et

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha a)\cos(\alpha t)}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \forall t \in \{-a, a\}. \tag{12}$$

Comme la fonction $\alpha \mapsto \dfrac{\sin(\alpha a)\cos(\alpha t)}{\alpha}$ est paire alors

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(\alpha a)\cos(\alpha t)}{\alpha} d\alpha = \pi f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-a, a\} \tag{13}$$

et

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(\alpha a)\cos(\alpha t)}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \forall t \in \{-a, a\}. \tag{14}$$

Prenons $a = 1$ et $t = 0$ dans (11) pour trouver que

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2}. \tag{15}$$

## Exercice 2.

1. Calculer la transformee de Fourier des fonctions suivantes:

   - Fonction Porte.

     $$\Pi(x) = 1, \quad |x| < \frac{1}{2}, \tag{16}$$

     et

     $$\Pi(x) = 0, \quad |x| \geq \frac{1}{2}. \tag{17}$$

   - Fonction Triangle.

     $$\Delta(x) = 1 - |x|, \quad |x| < 1, \tag{18}$$

     et

     $$\Delta(x) = 0, \quad |x| \geq 1. \tag{19}$$

2. Verifier que

   $$\Delta'(x) = \Pi(x + \frac{1}{2}) - \Pi(x - \frac{1}{2}). \tag{20}$$

3. En utilisant (20), verifier encore le resultat de transformee de Fourier de $\Delta$ obtenu dans la question 1.

4. Verifier que

   $$\Pi \star \Pi = \Delta. \tag{21}$$

5. En utilisant (21), verifier encore le resultat de transformee de Fourier de $\Delta$ obtenu dans la question 1.

## Solution Exercice

1. Calcul des transformees de Fourier

   - La fonction $\Pi$ est presque la même fonction $f$ definie a l'exercice 1 avec $a = 1/2$. Donc

     $$\hat{\Pi}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\alpha}. \tag{22}$$

   - La fonction $\Delta$ est paire. Donc

     $$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Delta)(\alpha) = \hat{\Delta}(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \Delta(t) \exp(-i\alpha t) dt = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \Delta(t) \cos(\alpha t) dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 (1 - t) \cos(\alpha t) dt. \end{aligned} \tag{23}$$

     Utilisons une integration par partie, on trouve

     $$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Delta)(\alpha) = \hat{\Delta}(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{1 - \cos\alpha}{\alpha^2} \right) \\ &= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha} \right)^2. \end{aligned} \tag{24}$$

2. Avec un calcul direct, on trouve (20).

3. Appliquons le transformee de Fourier $\mathcal{F}$ aux deux cotes de (20) et utlisons le fait que $\mathcal{F}(\varphi')(\alpha) = i\alpha\mathcal{F}(\varphi)(\alpha)$ pour tout $\varphi$ assez reguliere et verifie $\lim_{|x|\to+\infty}\phi(x) = 0$, pour trouver

$$\mathcal{F}(\Delta')(\alpha) = i\alpha\hat{\Delta}(\alpha) = \mathcal{F}\left(x \mapsto \Pi(x+\frac{1}{2})\right) - \mathcal{F}\left(x \mapsto \Pi(x-\frac{1}{2})\right). \tag{25}$$

Pour $\varphi$ assez reguliere, nous avons la regle suivante qui concerne la transformee de la translation d'une fonction

$$\mathcal{F}\left(x \mapsto \varphi(x+\delta)\right) = \exp(i\delta\alpha)\mathcal{F}\left(x \mapsto \varphi(x)\right). \tag{26}$$

Utilisons cette derniere regle, l'expression (25) devient

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\Delta')(\alpha) = i\alpha\hat{\Delta}(\alpha) &= \left(\exp(\frac{i\alpha}{2}) - \exp(-\frac{i\alpha}{2})\right)\mathcal{F}\left(\Pi\right)(\alpha) \\ &= 2i\sin(\frac{\alpha}{2})\hat{\Pi}(\alpha).\end{aligned} \tag{27}$$

Ce qui implique, en utlisant (22)

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}(\alpha) &= 2\frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\alpha}\right) \\ &= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\alpha}\right)^2.\end{aligned} \tag{28}$$

Ceci confirme bien le resultat obtenu dans (24).

4. A l'aide d'un calcul simple et la definition suivante de convolution, on peut verifier (21).

$$\mathcal{F}(\varphi \star \psi)(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t-x)\psi(x)dx. \tag{29}$$

5. On utlise la regle suivante de la transformee de Fourier de Convolution:

$$\mathcal{F}(\varphi \star \psi) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(\varphi)\mathcal{F}(\psi). \tag{30}$$

Appliquons (29) pour $\varphi = \Pi = \psi$ et utilisant (21), on trouve

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\Delta)(\alpha) &= \sqrt{2\pi}\left(\hat{\Pi}(\alpha)\right)^2 \\ &= \sqrt{2\pi}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\alpha}\right)^2 \\ &= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\alpha}\right)^2.\end{aligned} \tag{31}$$

**Exercice 3.** Calculer ls transformees de Laplace suivantes:

$$1.\ \mathcal{L}\left((t+2)\boldsymbol{u}(t) + (t+3)\boldsymbol{u}(t-2)\right), \quad 2.\ \mathcal{L}\left((t^2+t+1)\exp(-2t)\boldsymbol{u}(t)\right), \quad 3.\ \mathcal{L}\left((\cos(2t)-\sin(t))\exp(-3t)\boldsymbol{u}(t)\right), \tag{32}$$

avec $\boldsymbol{u}$ est la fonction de Heaviside:

$$\boldsymbol{u}(t) = 1, \quad t > 0 \tag{33}$$

et

$$\boldsymbol{u}(t) = 0, \quad t \leq 0. \tag{34}$$

# RAPPEL

- $$\mathcal{L}(t^n)(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}. \tag{35}$$

- $$\mathcal{L}(\exp(at))(p) = \frac{1}{p-a}. \tag{36}$$

- $$\mathcal{L}(\sin(at))(p) = \frac{a}{p^2+a^2}. \tag{37}$$
- $$\mathcal{L}(\cos(at))(p) = \frac{p}{p^2+a^2}. \tag{38}$$
- $$\mathcal{L}(f(at))(p) = \frac{1}{a}F(\frac{p}{a}). \tag{39}$$
- $$\mathcal{L}(\exp(at)f(t))(p) = F(p-a). \tag{40}$$
- $$\mathcal{L}(f(t+a))(p) = \exp(at)F(p). \tag{41}$$

  avec $F$ designe
  $$F(p) = \mathcal{L}(f)(p). \tag{42}$$
- $$\mathcal{L}(x')(p) = -x(0) + pX(p) \quad \text{and} \quad \mathcal{L}(x'\prime)(p) = -x'(0) - px(0) + p^2X(p). \tag{43}$$

  avec $X$ designe
  $$X(p) = \mathcal{L}(x(t))(p). \tag{44}$$

**Solution Exercice**

1. Comme $\mathcal{L}$ est lineaire, on $\mathcal{L}\left((t+2)\boldsymbol{u}(t) + (t+3)\boldsymbol{u}(t-2)\right) = \mathcal{L}\left((t+2)\boldsymbol{u}(t)\right) + \mathcal{L}\left((t+3)\boldsymbol{u}(t-2)\right)$. Donc
   $$\mathcal{L}\left((t+2)\boldsymbol{u}(t) + (t+3)\boldsymbol{u}(t-2)\right)(p) = \mathcal{L}\left(t\boldsymbol{u}(t)\right)(p) + 2\mathcal{L}\left(\boldsymbol{u}(t)\right)(p) + \exp(-2p)F(p), \tag{45}$$
   avec
   $$F(p) = \mathcal{L}(f(t))(p), \tag{46}$$
   et
   $$f(t-2) = (t+3)\boldsymbol{u}(t-2). \tag{47}$$
   Ceci donne
   $$f(t) = (t+5)\boldsymbol{u}(t). \tag{48}$$
   Nous avons alors
   $$\mathcal{L}\left((t+2)\boldsymbol{u}(t) + (t+3)\boldsymbol{u}(t-2)\right)(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p} + \left(\frac{1}{p^2} + \frac{5}{p}\right)\exp(-2p). \tag{49}$$
2. On utlise la relation suivante:
   $$\mathcal{L}\left((t^2+t+1)\exp(-2t)\boldsymbol{u}(t)\right)(p) = F(p+2), \tag{50}$$
   avec
   $$\begin{aligned} F(p) &= \mathcal{L}((t^2+t+1)\boldsymbol{u}(t))(p) \\ &= \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}. \end{aligned} \tag{51}$$
   Par consequent
   $$\mathcal{L}\left((t^2+t+1)\exp(-2t)\boldsymbol{u}(t)\right)(p) = \frac{2}{(p+2)^3} + \frac{1}{(p+2)^2} + \frac{1}{p+2}. \tag{52}$$
3. On utlise la relation suivante:
   $$\mathcal{L}\left((\cos(2t) - \sin(t))\exp(-3t)\boldsymbol{u}(t)\right)(p) = F(p+3), \tag{53}$$
   avec
   $$\begin{aligned} F(p) &= \mathcal{L}(\cos(2t) - \sin(t))\boldsymbol{u}(t))(p) \\ &= \frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{p^2+1}. \end{aligned} \tag{54}$$
   Par consequent
   $$\mathcal{L}\left((\cos(2t) - \sin(t))\exp(-3t)\boldsymbol{u}(t)\right)(p) = \frac{p+3}{(p+3)^2+4} - \frac{1}{(p+3)^2+1}. \tag{55}$$

**Exercice 4.** Calculer les originaux suivantes:

$$1.\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+2}{(p+3)(p+4)}\right),\quad 2.\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{(p+2)^2}\right),\quad 3.\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p-1}{p^2+2p+5}\right). \tag{56}$$

**Solution Exercice**

1. A l'aide de la decomposition en elements simple des fractions, nous avons
$$\frac{p+2}{(p+3)(p+4)} = \frac{\alpha}{p+3} + \frac{\beta}{p+4}. \tag{57}$$
D'ou
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+2}{(p+3)(p+4)}\right)(t) &= \alpha\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+3}\right)(t) + \beta\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+4}\right)(t)\\ &= \alpha\exp(-3t) + \beta\exp(-4t).\end{aligned} \tag{58}$$

2. A l'aide de la decomposition en elements simple des fractions, nous avons
$$\frac{p}{(p+2)^2} = \frac{1}{p+2} - \frac{2}{(p+2)^2}. \tag{59}$$
D'ou
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{(p+2)^2}\right)(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+2}\right)(t) - 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p+2)^2}\right)(t)\\ &= \exp(-2t) + 2t\exp(-2t)\\ &= (1+2t)\exp(-2t).\end{aligned} \tag{60}$$

3. Nous avons
$$\frac{p-1}{p^2+2p+5} = \frac{p+1}{(p+1)^2+4} - \frac{2}{(p+1)^2+4}. \tag{61}$$
D'ou
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p-1}{p^2+2p+5}\right)(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+1}{(p+1)^2+4}\right)(t) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(p+1)^2+4}\right)(t)\\ &= \exp(-t)\cos(2t) - \exp(-t)\sin(2t)\\ &= (\cos(2t) - \sin(2t))\exp(-t).\end{aligned} \tag{62}$$

**Exercice 5.** En utilisant la transformee de Laplace, resoudre les equations differentielles suivantes:

1. $$x''(t) + x(t) = \exp(t)\cos(t), \tag{63}$$
avec
$$x(0) = x'(0) = 0.$$

2. $$x'(t) + x(t) = t\boldsymbol{u}(t) - t\boldsymbol{u}(t-1), \tag{64}$$
avec
$$x(0) = 0.$$

**Solution Exercice**

1. Applications la Transformee de Laplace aux deux cotes de (63), utilisons le fait que $\mathcal{L}(\exp(t)\cos(t)) = \dfrac{p-1}{(p-1)^2+1}$, et utilisons le fait que $x(0) = x'(0) = 0$
$$(p^2+1)X(p) = \frac{p-1}{(p-1)^2+1}. \tag{65}$$
D'ou
$$X(p) = \frac{p-1}{((p-1)^2+1)(p^2+1)}. \tag{66}$$

A l'aide de la decomposition en elements simple des fractions, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{p-1}{((p-1)^2+1)(p^2+1)} &= \frac{\alpha p+\beta}{(p-1)^2+1}+\frac{\gamma p+\delta}{p^2+1} \\ &= a\frac{p-1}{(p-1)^2+1}+b\frac{1}{(p-1)^2+1}+\frac{\gamma p}{p^2+1}+\frac{\delta}{p^2+1}. \end{aligned} \tag{67}$$

D'ou

$$\begin{aligned} x(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(X(p)\right)(t) &= \frac{p-1}{((p-1)^2+1)(p^2+1)}=\frac{\alpha p+\beta}{(p-1)^2+1}+\frac{\gamma p+\delta}{p^2+1} \\ &= a\frac{p-1}{(p-1)^2+1}+b\frac{1}{(p-1)^2+1}+\frac{\gamma p}{p^2+1}+\frac{\delta}{p^2+1} \\ &= (a\cos(t)+b\sin(t))\exp(t)+\gamma\cos(t)+\delta\sin(t). \end{aligned} \tag{68}$$

2. Applications la Transformee de Laplace aux deux cotes de (64), utilisons le fait que $\mathcal{L}\left(t\boldsymbol{u}(t)-t\boldsymbol{u}(t-1)\right)(p)=\frac{1}{p^2}-(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p})\exp(-p)$, et utilisons le fait que $x(0)=0$

$$(p+1)X(p)=\frac{1}{p^2}-(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p})\exp(-p). \tag{69}$$

Donc

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{1}{p^2(p+1)}-\frac{1}{p^2}\exp(-p) \\ &= \frac{1}{p^2}-\frac{1}{p(p+1)}-\frac{1}{p^2}\exp(-p) \\ &= \frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p^2}\exp(-p). \end{aligned} \tag{70}$$

Appliquons maintenant la Transformee inverse de Laplace aux deux cotes de (70), on trouve

$$\begin{aligned} x(t) &= t\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{u}(t)+\exp(-t)\boldsymbol{u}(t)-(t-1)\boldsymbol{u}(t-1) \\ &= (t-1+\exp(-t))\,\boldsymbol{u}(t)-(t-1)\boldsymbol{u}(t-1). \end{aligned} \tag{71}$$

**Exercice 6.** En utilisant la transformee de Laplace, resoudre l'equation integrale suivante

$$f(x)=\sin x+2\int_0^x\cos(t-x)f(t)dt. \tag{72}$$

**Solution Exercice**

On peut prouver a travers des prolongements par zero que

$$\mathcal{L}\left(\int_0^x\cos(t-x)f(t)dt\right)(p)=\mathcal{L}\left(\cos\right)(p)\mathcal{L}\left(f\right)(p). \tag{73}$$

Appliquons maintenant la Transformee inverse de Laplace aux deux cotes de (72) et utilisons (73), on trouve

$$X(p)=\frac{1}{p^2+1}+\frac{2p}{p^2+1}X(p). \tag{74}$$

Ce qui donne

$$\frac{p^2-2p+1}{p^2+1}X(p)=\frac{p}{p^2+1}. \tag{75}$$

Donc

$$X(p)=\frac{1}{(p-1)^2}. \tag{76}$$

Ceci donne

$$f(x)=x\exp(x). \tag{77}$$

**Exercice 7.** En utilisant la transformee de Laplace, calculer l' integrale suivante

$$\int_0^\infty x\exp(-2x)\cos x dx. \tag{78}$$

**Solution Exercice**

Remarquons que

$$\begin{aligned} G(p)=\int_0^\infty x\cos x\exp(-px)dx &= \mathcal{L}(x\cos x)(p) \\ &= -\frac{d}{dp}\mathcal{L}(\cos x)(p) \\ &= -\left(\frac{p}{p^2+1}\right)' \\ &= \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}. \end{aligned} \tag{79}$$

Ce qui donne

$$\int_0^\infty x\exp(-2x)\cos x dx = G(2) = 3/25. \tag{80}$$

**Exercice 8.** Claculer la transformee de Fourier pour les fonctions suivantes

$$f(x) = \exp(-\pi x^2), \qquad g(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad h(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}. \tag{81}$$

**Solution Exercice**

1. Calcul de $\mathcal{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha)$. Nous avons

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi t^2)\exp(-i\alpha t)dt. \tag{82}$$

De plus, on utilisons la regle de la derivee de transformation de Fourier

$$\begin{aligned}\hat{f}'(\alpha) &= -i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t\exp(-\pi t^2)\exp(-i\alpha t)dt\\ &= -i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\exp(-\pi t^2)}{-2\pi}\right)'\exp(-i\alpha t)dt.\end{aligned} \tag{83}$$

Ceci avec une integration par partie implique

$$\begin{aligned}\hat{f}'(\alpha) &= -i\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}(-i\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi t^2)\exp(-i\alpha t)dt\\ &= -\frac{\alpha}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi t^2)\exp(-i\alpha t)dt\\ &= \lambda\alpha\hat{f}(\alpha),\end{aligned} \tag{84}$$

avec

$$\lambda = -\frac{1}{2\pi}$$

Ce qui donne apres la resolution d'une equation differentielle

$$\hat{f}(\alpha) = \gamma\lambda\exp(\frac{\alpha^2}{2}), \tag{85}$$

avec $\gamma$ est une constante reelle.
Calculons maintenant la constante $\gamma$. Prenons $\alpha = 0$ dans (85), on trouve

$$\gamma = \frac{\hat{f}(0)}{\lambda}. \tag{86}$$

Mais

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi t^2)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \tag{87}$$

Par consequent

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(\frac{\alpha^2}{2}), \tag{88}$$

2. Calcul de $\mathcal{F}(g)(\alpha) = \hat{g}(\alpha)$. Nous avons, comme $g$ est paire

$$\begin{aligned}\hat{g}(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(t)\cos(\alpha t)dt\\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{\cos(\alpha t)}{1+t^2}dt.\end{aligned} \tag{89}$$

Pour calculer $\hat{g}(\alpha)$, considerons la fonction $\varphi$ definie par

$$\varphi(t) = \exp(-|t|). \tag{90}$$

Comme $\varphi$ est paire, nous avons

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\varphi(t)\cos(\alpha t)dt\\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\alpha^2}.\end{aligned} \tag{91}$$

On utilise la Transformee inverse de cosinus pour avoir

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{\varphi}(t)\cos(\alpha t)d\alpha &= \varphi(t) &(92)\\ &= \exp\left(-|t|\right). &(93)\end{aligned}$$

On replace $\hat{\varphi}(\alpha)$ par sa valeur (91) dans (92) pour obtenir

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha t)}{1+\alpha^2}d\alpha = \frac{\pi}{2}\exp\left(-|t|\right). \tag{94}$$

Consequent

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha t)}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}\exp\left(-|\alpha|\right). \tag{95}$$

Donc

$$\hat{g}(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp\left(-|\alpha|\right). \tag{96}$$

3. We come back to compute the Fourier transform of $h(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$

**Exercice 9.**

1. Soit $f$ une fonction $T$-periodique. Montrer que

$$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{1-\exp(-Tp)}\int_0^T f(t)\exp(-pt)dt. \tag{97}$$

**Solution Exercice**

Nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-pt)dt\\ &= \sum_{k\geq 0}\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\exp(-pt)dt. &(98)\end{aligned}$$

Faisons un changement de variable $t := t-kT$ et utilisons le fait que $f$ une fonction $T$-periodique, on trouve

$$\begin{aligned}\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\exp(-pt)dt &= \int_0^T f(t)\exp(-p(t+kT))dt\\ &= \exp(-pkT)\int_0^T f(t)\exp(-pt)dt. &(99)\end{aligned}$$

On remplace cette expression dans (98) pour trouver

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(p) &= \left(\sum_{k\geq 0}\exp(-pkT)\right)\int_0^T f(t)\exp(-pt)dt\\ &= \frac{1}{1-\exp(-pT)}\int_0^T f(t)\exp(-pt)dt. &(100)\end{aligned}$$