"Ecole Preparatoire aux Sciences et Techniques"

Second year undergraduation **2010–2011**

Correction of the first exam in Analysis

Solution de l'exercice 1. **(4 point)**

1. **(1 point)** En calculant les derivees premiers, on trouve

$$f_x(x,y) = 2x - y^2, \tag{1}$$

$$f_y(x,y) = -2xy \tag{2}$$

Remarquons que $f_y(x,y) = 0$ implique $x = 0$ ou $y = 0$. Remplaçons ceci dans $f_x(x,y) = 0$, on $(x,y) = (0,0)$.

2. **(2 point)** Soit $y = \lambda x$ et remplaçons ceci dans l'expression de f (c'est la restriction de f sur $y = \lambda x$), on trouve

$$g(x) = f(x, \lambda x) = x^2 - x(\lambda x)^2 \tag{3}$$

Remarquons que $g_x(x) = 2x - 3\lambda^2 x^2 = x(2 - 3\lambda^2 x)$. La derivee $g_x(0) = 0$ pour $x = 0$ et $x = \dfrac{2}{3\lambda^2}$. Remarquons que $g_x(x) < 0$ pour $x < 0$ et $g_x(x) > 0$ pour $x \in (0, \dfrac{2}{3\lambda^2})$. Par consequent g decroissante, pour $x < 0$, et croissante pour $x \in (0, \dfrac{2}{3\lambda^2})$. Ce qui montre que 0 est un minimum locale pour $g(x) = f(x, \lambda x)$.
Remarque: On peut aussi utliser le fait que $g_{xx}(0) = 2 > 0$ pour justifier que 0 est un minimum locale pour $g(x) = f(x, \lambda x)$.

3. **(1 point)** Remarquouns que

$$f(\frac{y^2}{4}, y) = \frac{y^4}{16} - \frac{y^2}{4}(y^2) = -3\frac{y^4}{16} < 0 = f(0,0), \forall\, y \neq 0. \tag{4}$$

Ceci implique que $(0,0)$ n'est pas un minimum.

Solution de l'exercice 2. **(7 point)**

Soit Γ la courbe paramétrée représentée par la fonction

$$f(t) = \begin{cases} x(t) = \dfrac{t+1}{t^3}, \\ y(t) = \dfrac{t-1}{t^2} \end{cases}$$

a) **(0.75 pt)** Montrons que la courbe Γ est régulière sur son domaine de définition. En effet

$$\overrightarrow{f'(t)} = \begin{cases} x'(t) = \dfrac{-2t-3}{t^4}, \\ y'(t) = \dfrac{-t+2}{t^3} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{f'(t)} \neq \overrightarrow{0}, \forall t \in D_f = \mathbb{R}^*$$

b) **(0.75 pt)** La courbe Γ n'est pas birégulière sur $\mathbb{R}^*$. En effet,

$$\overrightarrow{f''(t)} = \begin{cases} x''(t) = \dfrac{6t+12}{t^5}, \\ y''(t) = \dfrac{2t-6}{t^4} \end{cases} \quad \text{et } \det\left(\overrightarrow{f'(t)}, \overrightarrow{f''(t)}\right) = \frac{2t^2+6t-6}{t^8} = \frac{2\left(t+3+\sqrt{21}\right)\left(t+3-\sqrt{21}\right)}{t^8}$$

Ainsi donc, Γ n'est pas birégulière sur $\mathbb{R}^*$ car $\overrightarrow{f'(t)}$ et $\overrightarrow{f''(t)}$ ne sont pas linéairement indépendants en $t = -\left(3+\sqrt{21}\right)$ et en $t = -3+\sqrt{21}$. Mais elle est birégulière sur $\mathbb{R}\backslash\left\{0; -\left(3+\sqrt{21}\right), -3+\sqrt{21}\right\}$.

c) **(0.5 pt)** Le point $M(1)$ est un point ordinaire. Car d'après (a) et (b), on $\overrightarrow{f^{'}(1)} \neq 0$ et $\overrightarrow{f'(1)}$ et $\overrightarrow{f^{"}(1)}$ sont linéairement indépendants. (Si on utilse la notation du cours on a, $p = 1$ et $q = 2$)

d)**(0.5 pt)** Etude des branches infinies en $t_0 = 0$:

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} x(t) = 0; \lim_{t\to-\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$$

$$\lim_{t\to0^+} y(t) = -\infty; \lim_{t\to0^-} y(t) = -\infty$$
$$\lim_{t\to0^+} x(t) = +\infty; \lim_{t\to0^-} x(t) = -\infty$$

On peut dire qu'il y a possibilité d'asymptôte oblique.
Calculons

$$\lim_{t\to0^+} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to0^-} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$$

on a donc une branche parabolique de direction Ox.

e) Tableau de variations de f.**(0.5 pt)**

$$\overrightarrow{f'(t)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2t-3}{t^4} = 0 \Rightarrow t = \dfrac{-3}{2} \\ y'(t) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-t+2}{t^3} = 0 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$$

Le tableau de variation est scanné a la derniere page

II) Soit C la courbe d'équation polaire

$$\rho(t) = \tan\left(\frac{2t}{3}\right)$$

1) Domaine de définition: **(0.5 pt)**

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{t \in \mathbb{R} : \cos\left(\frac{2t}{3}\right) \neq 0\right\} = \left\{t \in \mathbb{R} : \frac{2t}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{t \in \mathbb{R} : t \neq \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

2) période de f :

$T = 3k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{N}^*$. T=$\frac{3\pi}{2}$, est la plus petite periode de la fontion ρ mais pas pour la courbe **(0.5pt)**; si on prend T=$\frac{3\pi}{2}$, on obtient pas toute la courbe. En effet,

$$\begin{aligned} M\left(t+\frac{3\pi}{2}\right) &= \left(\rho(t), t+\frac{3\pi}{2}\right) = \left(\rho(t)\cos\left(t+\frac{3\pi}{2}\right), \rho(t)\sin\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)\right) \\ &= (\rho(t)\sin t, -\rho(t)\cos t) = (y(t), -x(t)) \neq M(t) \end{aligned}$$

où

$$M(t) = (x(t), y(t)) \text{ et } \rho\left(t+\frac{3\pi}{2}\right) = \rho(t)$$

Si on prend la période $T = 3\pi$, on a

$$\begin{aligned} M(t+3\pi) &= (\rho(t)\cos(t+3\pi), \rho(t)\sin(t+3\pi)) = (\rho(t)\cos(t+\pi), \rho(t)\sin(t+\pi)) \\ &= (-\rho(t)\cos(t), -\rho(t)\sin(t)) = (-x(t), -y(t)) = S_{origine}M(t) \end{aligned}$$

Si on veut avoir toute la courbe, on utilise la période $T = 6\pi$. En effet,

$$M(t+6\pi) = (\rho(t)\cos(t+6\pi), \rho(t)\sin(t+6\pi)) = (\rho(t)\cos(t), \rho(t)\sin(t)) = (x(t), y(t)) = M(t)$$

Choisissant la période $T = 6\pi$. Ainsi donc on étudie la courbe sur tout intervalle de longueur 6π, soit $I_2 = [-3\pi, 3\pi] \cap D_f$. **(1pt)**

3)Parité: **(1pt)**$[-3\pi, 0] \cap D_f \to [0, 3\pi] \cap D_f : t \to -t$

$$\begin{aligned} M(-t) &= (\rho(-t)\cos(-t), \rho(-t)\sin(-t)) = (-\rho(t)\cos(t), \rho(t)\sin(t)) = (-x(t), y(t)) \\ &= S_{Oy}M(t) \end{aligned}$$

On trace l'arc de courbe sur $I_2 \cap [0; +\infty[$ où $I_2 \cap]-\infty, 0]$ ensuite on fait la symétrie par rapport à Oy pour obtenir toute la courbe. Soit $I_3 = I_2 \cap [0; +\infty[= [0, 3\pi] \cap D_f$

3)symétries:**(1pt)**

a)

$$\left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \cap D_f \to \left[\frac{3\pi}{2}, 3\pi\right] \cap D_f : t \to 3\pi - t$$

$$\begin{aligned} M(3\pi - t) &= (\rho(3\pi - t)\cos(3\pi - t), \rho(3\pi - t)\sin(3\pi - t)) \\ &= (-\rho(t)\cos(\pi - t), -\rho(t)\sin(\pi - t)) = (\rho(t)\cos(t), -\rho(t)\sin(t)) \\ &= (x(t), -y(t)) = S_{Ox}M(t) \end{aligned}$$

On trace l'arc de courbe sur $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \cap D_f$ où $\left[\frac{3\pi}{2}, 3\pi\right] \cap D_f$ ensuite on fait la symétrie par rapport à Ox et par rapport à Oy pour obtenir toute la courbe.

Soit $I_4 = \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \cap D_f$

b)$\left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cap D_f \to \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right] \cap D_f : t \to \frac{3\pi}{2} - t$

$$\begin{aligned} M\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) &= \left(\rho\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right), \rho\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)\right) \\ &= (\rho(t)\sin(t), \rho(t)\cos(t)) = (y(t), x(t)) = S_{1i\grave{e}re\ bis\sec trice}M(t) \end{aligned}$$

On trace l'arc de courbe sur $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cap D_f$ où $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right] \cap D_f$ ensuite on fait la symétrie par rapport à la première bissectrice, ensuite par rapport à Ox et enfin par rapport à Oy pour obtenir toute la courbe.

Ainsi donc le plus petit intervalle de symétrie est

$$I_5 = \left[0, \frac{3\pi}{4}\right[$$

Solution de l'exercice 3. (4 point)

1. On a en posant

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \qquad \text{(0,5 pt)}$$

$$J = r$$

Et par suite

$$\iint\limits_{D} \frac{dxdy}{1+x^2+y^2} = 2\iint\limits_{D'} \frac{dxdy}{1+x^2+y^2} =$$

$$2\int\limits_{D''} \frac{1}{1+r^2} rdrd\theta = 2\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \int\limits_1^{\frac{1}{\cos\theta}} \frac{rdr}{1+r^2} d\theta + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_1^{\frac{1}{\sin\theta}} \frac{rdr}{1+r^2} d\theta\right) = \qquad \text{(0,5 pt)}$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\ln(1+\frac{1}{\cos^2\theta}) - \ln 2\right] d\theta + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\ln(1+\frac{1}{\sin^2\theta}) - \ln 2\right] d\theta \qquad \text{(0,5 pt)}$$

où

$$D' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \text{ et } x^2+y^2 \geq 1\right\} (\mathbf{0,5pt})$$

et

$$D'' = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 1 \leq r \leq \frac{1}{\cos\theta}\right\} \cup \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r \leq \frac{1}{\sin\theta}\right\}$$

2. Calculons l'aire de Δ, par définition

$$\text{aire}(\Delta) = \int\int\limits_{\Delta} dxdy \qquad \text{(0,5 pt)}$$

Pour

$$-1 \leq x \leq 1,$$

∞on a

$$4 - x^3 - x^2 > 0, \qquad \text{(0,5 pt)}$$

ce qui implique que

$$\text{aire}(\Delta) = \int\int\limits_{\Delta} dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{4-x^3} dy = \int_{-1}^{1} (4-x^3-x^2)dx = \left(4x - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{22}{3} \qquad \text{(1 pt)}$$

Solution de l'exercice 4. (5 point)

Posons

$$\frac{x}{a} = X, \frac{y}{b} = Y, \frac{z}{c} = Z, \qquad \text{(0,5 point)}$$

ou bien

$$x = aX, y = bY, z = cZ,$$

on aura alors

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(X,Y,Z)} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc \qquad \text{(0,5 point)}$$

et

$$\iiint\limits_{D} dxdydz = abc \iiint\limits_{D'} dXdYdZ \qquad \text{(1 point)}$$

où

$$D' = \left\{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 / X^2+Y^2+Z^2 \leq 1\right\} \qquad \text{(0,5 point)}$$

On passe maintenant aux coordonnées sphériques

$$X = r\cos\theta\sin\varphi, Y = r\sin\theta\sin\theta\sin\varphi, Z = r\cos\varphi \qquad \text{(0,5 point)}$$

on a alors

$$J = r^2\sin\varphi \qquad \text{(0,5 point)}$$

Et par suite

$$\iiint\limits_{D} dxdydz = abc\iiint\limits_{D'} dXdYdZ = abc\iiint\limits_{D"} r^2\sin\varphi d\varphi d\theta dr \int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} r^2\sin\varphi d\varphi d\theta dr = \frac{4}{3}\pi abc \qquad \text{(1 point)}$$

où

$$D" = \left\{(r,\theta,\varphi)\in R^3/0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\pi\right\} \qquad \text{(0,5 point)}$$