Correction du controle N$^\circ$1

Exercice 1 (6 **points**)**à répartir 3+3** Continuité de

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}\exp\left(x^2+y^2\right) \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

si on pose

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

on voit que $f_1(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\cos^3\theta\exp\left(r^2\right)$ tend vers $0 = f(0,0)$ qd $r \to 0$, ailleurs la fonction est continue en tant que produit de fonctions continues

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}\exp\left(x^2+y^2\right) \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ici aussi, on trouve que $f_2(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos^3\theta\exp\left(r^2\right)$ tend vers $\cos^3\theta \neq 0$ dépend donc de la direction et par conséquent f_2n'est pas continue en $(0,0)$.

$$f_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Comme

$$2xy \leq x^2+y^2$$

on déduit que

$$\left|\frac{x^3y}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{x^2+y^2}{2} \leq \frac{x^2}{2} \to 0 = f_3(0,0) \text{ qd } (x,y) \to (0,0) \text{ d'où la continuité de } f_3 \text{ en}$$

Ailleurs la fonction est continue.

Enfin la fonction

$$f_4(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^3+xy}{x^4+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ici aussi il suffit de poser

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

pour déduire que

$$f_4(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\cos^4\theta + r\sin^3\theta + \sin\theta\cos\theta}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta} \to \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \tan\theta \neq 0 = f_4(0,0) \text{ qd } r \to 0$$

et par suite f_4 n'est pas continue en $(0,0)$

Exercice 2 (8 **points**) Continuité en $(0,0)$ de

$$f(x,y) = \frac{x^2y + xy^2}{x^2+y^2}$$

On écrit

$$\left|\frac{x^2y + xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{\left(x^2+y^2\right)|y| + |x|\left(y^2+x^2\right)}{x^2+y^2} = |y| + |x| \to 0 = f(0,0) \text{ qd } (x,y) \to (0,0) \ \textbf{(1,5 pt)}$$

ce qui montre la continuité de f en $(0,0)$

Soit $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ un vecteur de R^2 $\overrightarrow{u} = \dfrac{v}{\|v\|}$, calculons

$$\begin{aligned}
\frac{f\left(t\left(\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}, \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}\right)\right) - f(0,0)}{t} &= \frac{f\left(\frac{tv_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}, \frac{tv_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}\right)}{t} \quad \textbf{(1,5 pt)} \\
\frac{\frac{t^2v_1^2}{v_1^2+v_2^2}\frac{tv_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} + \frac{t^2v_2^2}{v_1^2+v_2^2}\frac{tv_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}}{t\left(\frac{t^2v_1^2}{v_1^2+v_2^2} + \frac{t^2v_2^2}{v_1^2+v_2^2}\right)} &= \frac{t^3\frac{v_1v_2(v_1+v_2)}{\left(v_1^2+v_2^2\right)\sqrt{v_1^2+v_2^2}}}{t^3} \to \frac{v_1v_2(v_1+v_2)}{\left(v_1^2+v_2^2\right)\sqrt{v_1^2+v_2^2}} \ \textbf{(1,5}
\end{aligned}$$

quand $t \to 0$. On déduit que

$$D_{\overrightarrow{v}}f(0,0) = \frac{v_1v_2(v_1+v_2)}{\left(v_1^2+v_2^2\right)\sqrt{v_1^2+v_2^2}} \text{ où } \overrightarrow{v} = (v_1, v_2) \qquad \text{(formule 1)}$$

Si f était différentiable en $(0,0)$, on aurait

$$f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y \ \textbf{(1,5 pt)}$$

avec $\alpha(\Delta x, \Delta y), \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ qd $\Delta x, \Delta y \to 0$, le calcul donne

$$\frac{(\Delta x)^2 \Delta y + (\Delta y)^2 \Delta x}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y$$

soit en divisant par $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, on aurait

$$\frac{(\Delta x)^2 \Delta y + (\Delta y)^2 \Delta x}{\left((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \alpha(\Delta x, \Delta y) \frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} + \beta(\Delta x, \Delta y) \frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \ (\mathbf{1\ pt})$$

En prenant $\Delta x = \Delta y$ le premier membre prend la valeur $\dfrac{2}{(2)^{\frac{3}{2}}}$ alors que le second tend vers 0.D'où la contradiction.(**1 pt**)

Remarque

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0$$

(il suffit de prendre dans la formule (1), $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_1} = (1,0)$)

Exercice 3 (8 **points**) Continuité de f en $(0,0)$

Ici il suffit de se rappeller que lorsque $(x,y) \to (0,0)$

$$\sin y \sim y \ \text{ et } \ \sin x \sim x \ \ (\mathbf{0{,}5\ pt})$$

ce qui permet d'affirmer que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \sin y + y \sin x}{x^2 + y^2} \overset{(\mathbf{1\ pt})}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

qui n'existe pas, elle dépend de la manière dont $(x,y) \to (0,0)$ (poser $y = kx$) (**1 ,5 pt**)

Continuité des dérivées partielles, on a

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} = 0 \ (\mathbf{1\ pt})$$

De même

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{k^3} = 0 \ (\mathbf{1\ pt})$$

Maintenant si $(x,y)\neq(0,0)$, on a

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{(\sin y+y\cos x)\left(x^2+y^2\right)-2x\,(x\sin y+y\sin x)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\ (\mathbf{1\ pt})$$

et

$$\frac{\partial f(x,x)}{\partial x}=\frac{(\sin x+x\cos x)\left(x^2+x^2\right)-2x\,(x\sin x+x\sin x)}{\left(x^2+x^2\right)^2}=\frac{(x\cos x-\sin x)}{2x^2}\to\mp\infty$$

qd x$\to 0$. (**0 ,5 pt**)

De même

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{(\sin x+x\cos y)\left(x^2+y^2\right)-2y\,(x\sin y+y\sin x)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\ (\mathbf{1\ pt})$$

et

$$\frac{\partial f(x,x)}{\partial y}=\frac{(\sin x+x\cos x)\left(x^2+x^2\right)-2x\,(x\sin x+x\sin x)}{\left(x^2+x^2\right)^2}=\frac{(x\cos x-\sin x)}{2x^2}\to\mp\infty$$

qd x$\to 0$, (**0 ,5 pt**) ce qui montre que es dérivées partielles premières ne sont pas continues en $(0,0)$.

ou tout simplement dire f n'étant pas continue au moins une des dérivées partielles premières n'est pas continue

Exercice 4 (6 **points**) Calcul de la dérivé directionnelle

$$\overrightarrow{PM}=\left|\begin{array}{l} x_M-x_P=4-1=3 \\ \\ y_M-y_P=6-2=4\end{array}\right. \quad \text{puis } \overrightarrow{u}=\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|}=\left|\begin{array}{l}\frac{3}{5} \\ \\ \frac{4}{5}\end{array}\right. \quad (\mathbf{1{,}5\ pt})$$

$$D_{\overrightarrow{u}}f(1,2)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(P+t\overrightarrow{u}\right)-f(P)}{t}\overset{(\mathbf{1{,}5\ pt})}{=}\lim_{t\to 0}\frac{f\left[(1,2)+t\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)\right]-f(1,2)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(1+\dfrac{3}{5}t,2+\dfrac{4}{5}t\right)-f(1,2)}{t}$$

$$\overset{(\mathbf{1{,}5\ pt})}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\left(1+\dfrac{3}{5}t\right)^3-2\left(1+\dfrac{3}{5}t\right)^2\left(2+\dfrac{4}{5}t\right)+\left(1+\dfrac{3}{5}t\right)\left(2+\dfrac{4}{5}t\right)^2+1-2}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\tfrac{1}{125}\left(3t^2+35t+125\right)=1\ (\mathbf{1\ pt})$$

$$f(1,2)=2\ (\mathbf{0{,}5\ pt})$$