Université de Badji-Mokhtar -Annaba
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Concours de Formation Doctorale
Fonctions Spéciales

2015–2016

Corrigé d'epreuve: Différences Finies (Durée: 45m)

Exercice 1. Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$. On s'interesse au problème suivant:

$$-u_{xx}(x) + \frac{1}{1+x} u_x(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

avec

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{2}$$

On suppose que ce problème admet une solution unique $u \in H_0^1(0,1)$ et que $u \in \mathcal{C}^4[0,1]$.
On cherche une approximation pour le problème (1)–(2) par la méthode de Différences Finies.
Soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et considerons

$$h = \frac{1}{N+1}.$$

Pour chaque $i \in \{0, \dots, N+1\}$, on pose

$$x_i = ih.$$

On note par u_i la valeur approchée rechercherée de u au point x_i.
On utilise les approximations centrées les plus simples de u_x et u_{xx} aux points x_i. On pose

$$u_h = (u_1, \dots, u_N)^t.$$

1. Montrer que u_h est solution d'un système linéaire de la forme $A_h u_h = b_h$; donner A_h et b_h .
2. Montrer que le schéma numérique obtenu est consistant et donner une majoration de l'erreur de consistance (on rappelle que l'on a supposé $u \in \mathcal{C}^4[0,1]$).
3. Soit $v \in \mathbb{R}^N$, montrer que $A_h v \geq 0 \Rightarrow v \geq 0$ (ceci s'entend composante par composante). Cette propriété s'appelle conservation de la positivité.
4. On définit θ par

$$\theta(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^2 \ln(1+x) + \frac{2}{3}(x^2+2x)\ln(2), \quad x \in [0,1]. \tag{3}$$

Montrer qu'il existe une constante $C \geq 0$ independante de h tel que

$$\max_{i \in \{1,\dots,N\}} \left| -\frac{1}{h^2}\left(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}\right) + \frac{1}{2h(1+x_i)}(\theta_{i+1} - \theta_{i-1}) - 1 \right| \leq Ch^2, \tag{4}$$

avec

$$\theta_i = \theta(x_i).$$

Corrigé

1. Rappelons que Comme $u \in \mathcal{C}^4[0,1]$ et $h = x_{i+1} - x_i$. A l'aide d'un développement de Taylor d'ordre 4

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu_x(x_i) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i) + \frac{h^3}{6}u_{xxx}(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_i^1), \tag{5}$$

et

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu_x(x_i) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i) - \frac{h^3}{6}u_{xxx}(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_i^2), \tag{6}$$

avec $\xi_i^1 \in (x_i, x_{i+1})$ et $\xi_i^2 \in (x_{i-1}, x_i)$.

Effectuant la somme et la difference de (5) et (6), on obtient

$$u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) = 2u(x_i) + h^2 u_{xx}(x_i) + \frac{h^4}{24}(u^{(4)}(\xi_i^1) + u^{(4)}(\xi_i^2)), \tag{7}$$

et

$$u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) = 2hu_x(x_i) + \frac{h^3}{3}u_{xxx}(x_i) + \frac{h^4}{24}(u^{(4)}(\xi_i^1) - u^{(4)}(\xi_i^2)). \tag{8}$$

Ceci implique que

$$\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} = u_{xx}(x_i) + \frac{h^2}{24}(u^{(4)}(\xi_i^1) + u^{(4)}(\xi_i^2)), \tag{9}$$

et

$$\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} = u_x(x_i) + \frac{h^2}{6}u_{xxx}(x_i) + \frac{h^2}{48}(u^{(4)}(\xi_i^1) - u^{(4)}(\xi_i^2)). \tag{10}$$

Prenons en compte les conditions de Dirichlet (2), pour proposer le schéma numérique suivant

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{1}{1+x_i}\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = f(x_i), \quad i \in \{1, \dots, N\}, \tag{11}$$

et

$$u_0 = u_{N+1} = 0. \tag{12}$$

On peut écrire alors le schéma numérique (11)–(12) sous la forme matricielle suivante:

$$A_h u_h = b_h, \tag{13}$$

avec

$$A_h = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2(1+x_1)h} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2(1+x_2)h} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2(1+x_2)h} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2(1+x_N)h} & \frac{2}{h^2} \end{pmatrix}$$

et

$$b_h = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix} \tag{14}$$

On peut ecrire la matrice A_h sous la forme suivante:

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2h}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1+x_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{1}{1+x_2} & 0 & \frac{1}{1+x_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{1+x_N} & 0 \end{pmatrix}$$

2. Remplaçons u_i par $u(x_i)$ dans le coté gauche de (11), utilisons (9)–(10) et l'equation (1), on obtient

$$-\frac{u(x_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1})}{h^2}+\frac{1}{1+x_i}\frac{u(x_{i+1})-u(x_{i-1})}{2h}=f(x_i)+R^i,\quad i\in\{1,\dots,N\}, \tag{15}$$

avec $R^i=R_1^i+R_2^i$ et

$$R_1^i=-\frac{h^2}{24}(u^{(4)}(\xi_i^1)+u^{(4)}(\xi_i^2)), \tag{16}$$

et

$$R_2^i=\frac{1}{1+x_i}\left(\frac{h^2}{6}u_{xxx}(x_i)+\frac{h^2}{48}(u^{(4)}(\xi_i^1)-u^{(4)}(\xi_i^2))\right). \tag{17}$$

Nous avons

$$|R_1^i|\leq\frac{h^2}{12}\|u^{(4)}\|_{\mathcal{C}[0,1]}, \tag{18}$$

et, car $\dfrac{1}{1+x_i}\leq 1$

$$|R_2^i|\leq\frac{h^2}{6}\|u^{(3)}\|_{\mathcal{C}[0,1]}+\frac{h^2}{24}\|u^{(4)}\|_{\mathcal{C}[0,1]}. \tag{19}$$

Nous avons alors une estimation pour l'erreur de consistance:

$$|R^i|\leq\left(\frac{\|u^{(3)}\|_{\mathcal{C}[0,1]}}{6}\|u^{(3)}\|_{\mathcal{C}[0,1]}+\frac{|u^{(4)}\|_{\mathcal{C}[0,1]}}{8}|u^{(4)}\|_{\mathcal{C}[0,1]}\right)h^2. \tag{20}$$

Qui est **d'ordre deux**.

3. Posons

$$v=\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_N\end{pmatrix} \tag{21}$$

L'hypothese $A_h v\geq 0\Rightarrow v\geq 0$ signifie que

$$-\frac{v_{i+1}-2v_i+v_{i-1}}{h^2}+\frac{1}{1+x_i}\frac{v_{i+1}-v_{i-1}}{2h}\geq 0,\quad i\in\{1,\dots,N\}, \tag{22}$$

et

$$v_0=v_{N+1}=0. \tag{23}$$

On peut ecrire la condition (22) sous la forme

$$\left(-\frac{1}{h^2}+\frac{1}{2h(1+x_i)}\right)v_{i+1}+\frac{2}{h^2}v_i+\left(-\frac{1}{h^2}-\frac{1}{2h(1+x_i)}\right)v_{i-1}\geq 0,\quad i\in\{1,\dots,N\}. \tag{24}$$

Considerons

$$p=\min\left\{j\in\{0,\dots,N+1\}:v_j=\min\{v_0,\dots,v_{N+1}\}\right\}. \tag{25}$$

Supposons que $p\in\{1,\dots,N\}$ et ecrivons (24) pour $i=p$:

$$\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{2h(1+x_p)}\right)(v_p-v_{p-1})+\left(\frac{1}{h^2}-\frac{1}{2h(1+x_p)}\right)(v_p-v_{p+1})\geq 0. \tag{26}$$

Nous avons $v_p-v_{p-1}<0$. Donc

$$\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{2h(1+x_p)}\right)(v_p-v_{p-1})<0. \tag{27}$$

D'un autre coté $v_p - v_{p+1} \leq 0$ et $\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h(1+x_p)} = \frac{1}{h}\frac{2+(2p-1)h}{2h(1+x_p)} > 0$. Ceci implique que

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h(1+x_p)}\right)(v_p - v_{p+1}) \leq 0. \tag{28}$$

Effectuant la somme de (27) et (28), on trouve que

$$\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h(1+x_p)}\right)(v_p - v_{p-1}) + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h(1+x_p)}\right)(v_p - v_{p+1}) < 0. \tag{29}$$

Contradiction avec (26). Ceci montre que $p = 0$ ou $p = N+1$ et par consequent le minimum de v_i est $v_0 = 0$ ou $v_{N+1} = 0$.

4. Nous avons

$$\theta_x(x) = -(1+x)\ln(1+x) - \frac{1+x}{2} + \frac{2}{3}(2x+2)\ln(2),$$
$$\theta_{xx}(x) = -\frac{2\ln(1+x)+3}{2} + \frac{4}{3}\ln(2),$$
$$\theta_{xxx}(x) = -\frac{1}{1+x},$$

et

$$\theta^{(4)}(x) = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Remarquons que la fonction θ verifie le problem (1)–(2) avec $f \equiv 1$

$$-\theta_{xx}(x) + \frac{1}{1+x}\theta_x(x) = 1, \quad x \in (0,1), \tag{30}$$

avec

$$\theta(0) = \theta(1) = 0. \tag{31}$$

Utilisons alors (15) pour trouver

$$-\frac{\theta(x_{i+1}) - 2\theta(x_i) + \theta(x_{i-1})}{h^2} + \frac{1}{1+x_i}\frac{\theta(x_{i+1}) - \theta(x_{i-1})}{2h} = 1 + R^i, \quad i \in \{1, \ldots, N\}, \tag{32}$$

avec l'estimation (20)

$$|R^i| \leq \left(\frac{\|\theta^{(3)}\|_{\mathcal{C}[0,1]}}{6}\|\theta^{(3)}\|_{\mathcal{C}[0,1]} + \frac{|\theta^{(4)}\|_{\mathcal{C}[0,1]}}{8}|u^{(4)}\|_{\mathcal{C}[0,1]}\right)h^2. \tag{33}$$

Utilisons alors (32) et (33) pour trouver

$$| -\frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{h^2} + \frac{1}{1+x_i}\frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2h} - 1| \leq Ch^2, \tag{34}$$

avec

$$C = \frac{\|\theta^{(3)}\|_{\mathcal{C}[0,1]}}{6}\|\theta^{(3)}\|_{\mathcal{C}[0,1]} + \frac{|\theta^{(4)}\|_{\mathcal{C}[0,1]}}{8}|u^{(4)}\|_{\mathcal{C}[0,1]}.$$