University of Annaba–"Ecole Preparatoire aux Sciences et Techniques"
Second year undergraduation **2010–2011**

Fonctions de plusieurs variables

Dérivées composées, formule de Tayolr, et extréma

Corrigé de la serie 3

This work is wriiten in French. An English version will be provided soon.
Prof. Bradji, Abdallah
http://www.cmi.univ-mrs.fr/~bradji/
December 5th 2010

Solution de l'exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et considérons la fonction g définie par

$$g(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x). \tag{1}$$

Posons

$$u = x - y, \;\; v = y - z \;\; w = z - x. \tag{2}$$

On utilise la dérivée de la fonction composée, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}\\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(1) + \frac{\partial f}{\partial v}(0) + \frac{\partial f}{\partial w}(-1)\\ &= \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial w}, \qquad (3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}\\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(-1) + \frac{\partial f}{\partial v}(1) + \frac{\partial f}{\partial w}(0)\\ &= -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}, \qquad (4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}\\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(0) + \frac{\partial f}{\partial v}(-1) + \frac{\partial f}{\partial w}(1)\\ &= -\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}. \qquad (5)\end{aligned}$$

Utilisons maintenant les expressions (3)–(5) pour trouver

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial w}\right) + \left(-\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) + \left(-\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}\right) \tag{6}$$

Solution de l'exercice 2. Soit

$$z = 2x^2 + xy + y^2, \tag{7}$$

avec

$$x(t) = \sin\,t \;\;\text{et}\;\; y(t) = \cos\frac{t}{2}. \tag{8}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{d\,z}{d\,t} &= \frac{\partial\,z}{\partial\,x}\frac{d\,x}{dt} + \frac{\partial\,z}{\partial\,y}\frac{d\,y}{dt} \\
&= (\,4x+y)\cos\,t + (\,x+2y)\,(-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}) \\
&= \left(4\sin\,t + \cos\frac{t}{2}\right)\cos\,t - \frac{1}{2}\left(\sin\,t + 2\cos\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2} \qquad (9)
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}^2$ et g une fonction définie par

$$g(x,y) = f(x^2-y^2, 2xy). \tag{10}$$

1. Posons

$$u = x^2-y^2,\;\; v = 2xy. \tag{11}$$

On utilise la dérivée de la fonction composée, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\,g}{\partial\,x} &= \frac{\partial\,f}{\partial\,u}\frac{\partial\,u}{\partial\,x} + \frac{\partial\,f}{\partial\,v}\frac{\partial\,v}{\partial\,x} \\
&= \frac{\partial\,f}{\partial\,u}(2x) + \frac{\partial\,f}{\partial\,v}(-2y) \\
&= 2x\frac{\partial\,f}{\partial\,u} - 2y\frac{\partial\,f}{\partial\,v}, \qquad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\,g}{\partial\,y} &= \frac{\partial\,f}{\partial\,u}\frac{\partial\,u}{\partial\,y} + \frac{\partial\,f}{\partial\,v}\frac{\partial\,v}{\partial\,y} \\
&= \frac{\partial\,f}{\partial\,u}(-2y) + \frac{\partial\,f}{\partial\,v}(2x) \\
&= -2y\frac{\partial\,f}{\partial\,u} + 2x\frac{\partial\,f}{\partial\,v}. \qquad (13)
\end{aligned}$$

2. Nous avons

$$F(r,\theta) = f(r\cos\,\theta, r\sin\,\theta). \tag{14}$$

Le relation entre les coordonnées polaires et les coordonnées cartsiennes

$$x = r\cos\,\theta \text{ et } y = r\sin\,\theta) \tag{15}$$

implique

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \text{ et } \theta = \arctan\frac{y}{x}. \tag{16}$$

On utilise la dérivée de la fonction composée, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\,f}{\partial\,x} &= \frac{\partial\,F}{\partial\,r}\frac{\partial\,r}{\partial\,x} + \frac{\partial\,F}{\partial\,\theta}\frac{\partial\,\theta}{\partial\,x} \\
&= \frac{\partial\,F}{\partial\,r}(\cos\,\theta) + \frac{\partial\,F}{\partial\,\theta}\left(-\frac{\sin\,\theta}{r}\right) \\
&= \cos\,\theta\frac{\partial\,F}{\partial\,r} - \frac{\sin\,\theta}{r}\frac{\partial\,F}{\partial\,\theta} \qquad (17)
\end{aligned}$$

et, par la même maniere, on a

$$\frac{\partial\,f}{\partial\,y} = \sin\,\theta\frac{\partial\,F}{\partial\,r} + \frac{\cos\,\theta}{r}\frac{\partial\,F}{\partial\,\theta}. \tag{18}$$

On utilise maintenant l'identité (17) pour trouver:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\theta}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta}\right)\\
&- \frac{\sin\theta}{r}\left(-\sin\theta\frac{\partial F}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta}-\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}\right)\\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+2\frac{\sin\theta\,\cos\theta}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\theta}-2\frac{\cos\theta\,\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\\
&+ \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}.
\end{aligned}\tag{19}$$

On utilise maintenant l'identité (18) pour trouver:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \sin^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}-2\frac{\sin\theta\,\cos\theta}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\theta}+2\frac{\sin\theta\,\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta}\\
&+ \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}.
\end{aligned}\tag{20}$$

Faisons la somme de (19)–(20) coté a coté et utilisons le fait que$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ pour tout θ, on trouve

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}.\tag{21}$$

Solution de l'exercice 4.

1. $f(x,y)=\ln xy$. Tout d'abord, remarquons que $D_f=\mathbb{R}_\star^+\times\mathbb{R}_\star^+\cup\mathbb{R}_\star^-\times\mathbb{R}_\star^-$. On utilise les regles de calculs de differentielle, on trouve:

$$\begin{aligned}
df &= \frac{1}{xy}dxy\\
&= \frac{1}{xy}\,(ydx+xdy)\\
&= \frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}.
\end{aligned}\tag{22}$$

2. $f(x,y,z)=xyz\,(1+\sinh(yz))$.

$$\begin{aligned}
df &= (1+\sinh(yz))\;dxyz+xyz\,d\,(1+\sinh(yz))\\
&= (1+\sinh(yz))\;(yzdx+xzdy+xydz)\;+xyz\,d\sinh(yz)\\
&= (1+\sinh(yz))\;(yzdx+xzdy+xydz)\;+xyz\cosh(yz)\;(zd\,y+yd\,z)\\
&= yz\,(1+\sinh(yz))\;dx+xz\,(1+\sinh(yz)\;+yz\cosh(yz))\;dy\\
&+ xy\,(1+\sinh(yz)\;+yz\cosh(yz))\;dz.
\end{aligned}\tag{23}$$

3. $f(x,y)=\sin\left(x^2y\right)\exp(x-y)$.

$$\begin{aligned}
df &= \exp(x-y)d\sin\left(x^2y\right)\;+\sin\left(x^2y\right)\;d\exp(x-y)\\
&= \cos\left(x^2y\right)\exp(x-y)\,dx^2y+\exp(x-y)\sin\left(x^2y\right)\;d(x-y)\\
&= \cos\left(x^2y\right)\exp(x-y)\;\left(2xydx+x^2dy\right)+\exp(x-y)\sin\left(x^2y\right)\;(dx-dy)\\
&= \exp(x-y)\;\left(2xy\cos\left(x^2y\right)+\sin\left(x^2y\right)\right)\;dx\\
&+ \exp(x-y)\;\left(x^2\cos\left(x^2y\right)-\sin\left(x^2y\right)\right)\;dy.
\end{aligned}\tag{24}$$

Solution de l'exercice 5.

1. Une fonction f est donnée $f(xy) = xy + x^2 + 4y^2$ avec $\mathcal{P} = (1,2)$. Développement limité d'ordre 2 de f au point $\mathcal{P}$ est donnée:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)(x-1)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2)(y-2)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2)(x-1)(y-2) + \mathcal{R}. \end{aligned} \tag{25}$$

Calculons les derivées partielles de f au point $(1,2)$:

(a) $f(1,2) = 2 + 1 + 16 = 19$

(b)
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y + 2x, \tag{26}$$
ce qui entraine
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 4. \tag{27}$$

(c)
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 8y, \tag{28}$$
ce qui entraine
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 17. \tag{29}$$

(d)
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2. \tag{30}$$

(e)
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 8. \tag{31}$$

(f)
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1. \tag{32}$$

Combinons (26)–(32) avec (25) pour trouver

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 19 + 4(x-1) + 17(y-2) + (x-1)^2 + 4(y-2)^2 + (x-1)(y-2) + \mathcal{R} \\ &= 2x + 16y + x^2 + 4y^2 + xy + \mathcal{R}. \end{aligned} \tag{33}$$

L'equation du plan tangent au point $(1,2,19)$ est

$$z - 19 = 4(x-1) + 17(y-2). \tag{34}$$

2. La fonction f est donnée par $f(x,y) = x^2y + 3yx + y^4$; $\mathcal{P} = (1,2)$. On utilise la formule (25) car nous avons le même point.
Calculons les derivées partielles de f au point $(1,2)$:

(a) $f(1,2) = 2 + 6 + 16 = 24$

(b)
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + 3y, \tag{35}$$
ce qui entraine
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2(1)(2) + 3(2) = 10. \tag{36}$$

(c)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 3x + 4y^3, \tag{37}$$

ce qui entraine

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 1 + 3 + 32 = 36. \tag{38}$$

(d)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y, \tag{39}$$

donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) = 4. \tag{40}$$

(e)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2, \tag{41}$$

donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2) = 48. \tag{42}$$

(f)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x + 3, \tag{43}$$

ceci nous donne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2) = 2 + 3 = 5. \tag{44}$$

Le D.L. de f est donc

$$f(x,y) = 24 + 10(x-1) + 36(y-2) + 2(x-1)^2 + 24(y-2)^2 + 5(x-1)(y-2) + \mathcal{R}. \tag{45}$$

L'equation du plan tangent au point $(1,2,24)$ est

$$z - 24 = 10(x-1) + 36(y-2). \tag{46}$$

3. La fonction f est donnée par $f(x,y) = \ln\,(\,1 + 3y + 2x)$; $\mathcal{P} = (0,0)$. Le D. L. d'ordre 2 de f au point $\mathcal{P}$ est

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)xy + \mathcal{R}. \end{aligned} \tag{47}$$

A l'aide des calculs similaires a celles utilisé precedement, on trouve

$$f(x,y) = 2x + 3y - 2x^2 - \frac{9}{2}y^2 - 6xy + \mathcal{R}. \tag{48}$$

L'equation du plan tangent au point $\mathcal{P} = (0,0)$ est

$$z = 2x + 3y. \tag{49}$$

Solution de l'exercice 6. Un étudiant a calculé le plan tangent $z = x^4 - y^2$ au point $\mathcal{P} = (2,3,7)$ pour trouver

$$z = 4x^3(x-2) - 2y(y-3). \tag{50}$$

1. La réponse (50) est fausse car l'equation du plan tangent doit etre lineaire par contre (50) n'est pas lineaire.

2. Existent deux erreurs commis:

(a) étudiant a calculé les derivées partielles $\partial f/\partial x = 4x^3$ $\partial f/\partial y = -2y$ mais il a pas remplacé par le point $(2,3)$ pour calculer les coefficient de $x-2$ et $y-3$ dans l'equation du plan tangent.

(b) étudiant n'a pas mis la valeur z_0 dans l'equation

3. la bonne reponse est

$$z - 7 = 32(x-2) - 6(y-3), \tag{51}$$

qui est equivalent a

$$z = 32x - 6y - 39. \tag{52}$$

Solution de l'exercice 7. Soit la fonction

$$f(x,y) = \exp x \cos y. \tag{53}$$

1. D.L. d'ordre 0, 1, 2, et 3 de f au point $\mathcal{P} = (0, \pi/3)$:

(a) D.L. d'ordre 0

$$f(x,y) \approx f(0,\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}. \tag{54}$$

(b) D.L. d'ordre 1

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx f(0,\frac{\pi}{3}) + x\frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi/3) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi/3)(y-\frac{\pi}{3}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \sqrt{3}\frac{y-\frac{\pi}{3}}{2}. \end{aligned} \tag{55}$$

(c) D.L. d'ordre 2

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx f(0,\frac{\pi}{3}) + x\frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi/3) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi/3)(y-\frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,\pi/3) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,\pi/3)(y-\frac{\pi}{3})^2 \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,\pi/3)x(y-\frac{\pi}{3}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(y-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}\left(y-\frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x(y-\frac{\pi}{3}). \end{aligned} \tag{56}$$

(d) D.L. d'ordre 3

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx f(0,\frac{\pi}{3}) + x\frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi/3) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi/3)(y-\frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,\pi/3) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,\pi/3)(y-\frac{\pi}{3})^2 \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,\pi/3)x(y-\frac{\pi}{3}) + \frac{1}{6}x^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,\pi/3) + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,\pi/3)(y-\frac{\pi}{3})^3 \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,\pi/3)x^2(y-\frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,\pi/3)x(y-\frac{\pi}{3})^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(y-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}\left(y-\frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x(y-\frac{\pi}{3}) \\ &+ \frac{x^3}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12}(y-\frac{\pi}{3})^3 - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2(y-\frac{\pi}{3}) - \frac{1}{4}x(y-\frac{\pi}{3})^2. \end{aligned} \tag{57}$$

Une autre idée pour calculer le developpement limité de $f(x,y) = \exp(x)\sin(y)$: on calcule le D.L. d'ordre 3 de $\exp(x)$ au voisinage de 0 et le D.L. d'ordre 3 de $\sin(y)$ au voisinage de $\frac{\pi}{3}$. On fait aprés le produit des deux D.L. .

2. Calcul approché de $f(-1/10, \pi/3 + 1/50)$: comme le point $(-1/10, \pi/3+1/50)$ est voisin du point $(0,\pi/3)$, ou nous avons claculé les D.L (54), (55), (56), et (57), on utilise alors les D.L (54), (55), (56), et (57) pour calculer approximativement $f(-1/10, \pi/3+1/50)$ on repmplacant x par $-1/10$ et y par $\pi/3 + 1/50$..

(a) Une valeur approchée en utilisant D.L (54): on remplace x par $-1/10$ et y par $\pi/3+1/50$ dans (54) pour trouver

$$f(-1/10,\pi/3+1/50)\approx\frac{1}{2}=0.5 \tag{58}$$

(b) Une valeur approchée en utilisant D.L (55): on remplace x par $-1/10$ et y par $\pi/3+1/50$ dans (55) pour trouver

$$f(-1/10,\pi/3+1/50)\approx\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{100}=0.500-(1.732/100)=0.500-0.01732=0.482 \tag{59}$$

Solution de l'exercice 8.

1. On veut calculer les points de surface $z=4x^2+y^2$ où le plan tangent est parallele au plan $z=-x-y+6$. Considerons un point (x_0,y_0,z_0) appartient a la surface $z=4x^2+y^2$ (donc $z_0=4x_0^2+y_0^2$) où le plan tangent, noté (Δ) est parallele au plan $z=-x-y+6$. Comme l'equation du (Δ) est

$$z-z_0=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0), \tag{60}$$

alors

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)=-1,\ \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)=-1,\ z_0=4x_0^2+y_0^2, \tag{61}$$

ce qui est equivalent a

$$8x_0=-1,\ 2y_0=-1,\ z_0=4x_0^2+y_0^2. \tag{62}$$

On trouve alors

$$(x_0,y_0,z_0)=(-1/8,-1/2,5/16). \tag{63}$$

2. Même question avec $z=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$. On utilise des calculs similaires a celles de question precedente, on trouve

$$8x_0=\frac{3}{2},\ 2y_0=\frac{1}{2},\ z_0=4x_0^2+y_0^2, \tag{64}$$

avec (x_0,y_0,z_0) est un point de surface où le plan tangent est parallele au plan $z=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$. Donc

$$(x_0,y_0,z_0)=(3/16,1/4,13/64). \tag{65}$$

Solution de l'exercice 9. (La matrices Hessienne)

1. $f(x,y,z)=\sin(xyz)$. Domaine de définition de f est $\mathbb{R}^3$. La matrice Hessienne est par definition

$$H(f)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{pmatrix} \tag{66}$$

Donc

$$H(f)=\begin{pmatrix}-(yz)^2\sin xyz & z(\cos xyz-xyz\sin xyz) & y(\cos xyz-xyz\sin xyz)\\ z(\cos xyz-xyz\sin xyz) & -(xz)^2\sin xyz & x(\cos xyz-xyz\sin xyz)\\ y(\cos xyz-xyz\sin xyz) & x(\cos xyz-xyz\sin xyz) & -(xy)^2\sin xyz\end{pmatrix} \tag{67}$$

2. $f(x,y)=\sin^2\left(\frac{x}{y}\right)$. Domaine de definition de f est $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\star$. La matrice Hessienne est

$$H(f)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix} \tag{68}$$

Remarquons, pour simplifier les calculs, que $f(x,y)=\frac{1}{2}(1-\cos\frac{2x}{y})$. Donc la matrice (68) devient

$$H(f)=\begin{pmatrix}\frac{2}{y^2}\cos\frac{2x}{y} & -\frac{1}{y^2}\left(\sin\frac{2x}{y}+\frac{2x}{y}\cos\frac{2x}{y}\right)\\ -\frac{1}{y^2}\left(\sin\frac{2x}{y}+\frac{2x}{y}\cos\frac{2x}{y}\right) & \frac{2x}{y^3}\left(\sin\frac{2x}{y}+\frac{x}{y}\cos\frac{2x}{y}\right)\end{pmatrix} \tag{69}$$

Solution de l'exercice 10. (Recherche des points critiques)

1. $f(x,y) = 2x^2y + 2x^2 + y$. Pour que f admet un point critique au point $\mathcal{P}$ il faut que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathcal{P}) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathcal{P}) = 0$. On calcule les derivees partielles pour avoir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4xy + 4x, \tag{70}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2 + 1. \tag{71}$$

On remarque que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2 + 1 \geq 1 > 0$; donc $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ ne s'annule pas. Par consequent, f n'admet pas des points critiques.

2. $f(x,y) = xy^2(1 + x + 3y) = xy^2 + x^2y^2 + 3xy^3$. Pour que f admet un point critique au point $\mathcal{P}$ il faut que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathcal{P}) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathcal{P}) = 0$. On calcule les derivees partielles pour avoir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + 2xy^2 + 3y^3 = y^2(1 + 2x + 3y), \tag{72}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + 2x^2y + 9xy^2 = xy(2 + 2x + 9y). \tag{73}$$

L'ensemble des points critiques est

$$\mathbb{R} \times \{0\} \cup \left\{(0, -\frac{1}{3}), (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{6})\right\}. \tag{74}$$

Solution de l'exercice 11. (Nature des points critiques)

1. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$, $\mathcal{P} = (0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y \tag{75}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - x \tag{76}$$

Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, donc $\mathcal{P} = (0,0)$ est un point critique pour f. Pour determiner la nature de $\mathcal{P}$, on cherche le determinent de la matrice Hessienne de f.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \tag{77}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -1 \tag{78}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 \tag{79}$$

Ce qui implique

$$\det\, H(f)(\mathcal{P}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathcal{P})\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathcal{P}) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathcal{P})\right)^2 = 4 - 1 = 3 > 0. \tag{80}$$

Ceci avec le fait que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathcal{P} = 2 > 0$ implique que $\mathcal{P} = (0,0)$ est un minimum.

2. $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$, $\mathcal{P} = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y \tag{81}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x + 2y \tag{82}$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, donc $\mathcal{P} = (0,0)$ est un point critique pour f. Pour determiner la nature de $\mathcal{P}$, on cherche le determinent de la matrice Hessienne de f.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \tag{83}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2 \tag{84}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 \tag{85}$$

Ce qui implique

$$\det H(f)(\mathcal{P}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathcal{P})\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathcal{P}) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathcal{P})\right)^2 = 4 - 4 = 0. \tag{86}$$

On peut rien conclure.

Par contre, on remarque que

$$f(0,0) = 6 \tag{87}$$

et

$$f(x,y) = (x+y)^2 + 6 \geq 6 = f(0,0), \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{88}$$

Donc, le point $\mathcal{P} = (0,0)$ est un minimum global.

3. $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$, $\mathcal{P} = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2y^2 + 2x + 3y \tag{89}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4xy - 4y^3 + 3x + 2y \tag{90}$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, donc $\mathcal{P} = (0,0)$ est un point critique pour f. Pour determiner la nature de $\mathcal{P}$, on cherche le determinent de la matrice Hessienne de f.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x + 2; \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathcal{P}) = 2 \tag{91}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4x - 12y^2 + 2; \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathcal{P}) = 2 \tag{92}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4y + 3; \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathcal{P}) = 3. \tag{93}$$

Ce qui implique

$$\det H(f)(\mathcal{P}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathcal{P})\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathcal{P}) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathcal{P})\right)^2 = 4 - 9 = -5 < 0. \tag{94}$$

Donc le point f n'admet pas $\mathcal{P}$ d'extrimum local en $\mathcal{P}$. $\mathcal{P}$ est donc un point selle.

Solution de l'exercice 12.

1. $f(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$. Remarquons que

$$f(x,y) = \sin x + (y-1)^2. \tag{95}$$

Ceci montre que

$$-1 \leq f(x,y) \tag{96}$$

Ce qui montre que f a un manimum egale -1 pour (x,y) satisfait $\sin x = -1$ et $(y-1)^2 = 0$. Donc f admet un minumum global pour $(x,y) \in \left\{ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\} \times \{1\}$.

Pour etudiants: utilisez la methode classique, en utilisant la matrice Hessienne, pour obtenir les memes resultats.

2. $f(x,y) = \exp(x^2+y^2-2x+2y)$. Pour que f admet un point critique au point $\mathcal{P}$ il faut que $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathcal{P}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathcal{P}) = 0$. On calcule les derivees partielles pour avoir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x-2)\exp(x^2+y^2-2x+2y), \tag{97}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2y+2)\exp(x^2+y^2-2x+2y). \tag{98}$$

Le point critique est donc $\mathcal{P} = (1,-1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2\exp(x^2+y^2-2x+2y) + (2x-2)^2\exp(x^2+y^2-2x+2y);\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathcal{P}) = 2\exp -2 \tag{99}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\exp(x^2+y^2-2x+2y) + (2y+2)^2\exp(x^2+y^2-2x+2y);\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathcal{P}) = 2\exp -2 \tag{100}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = (2x-2)2y+2)\exp(x^2+y^2-2x+2y);\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathcal{P}) = 0 \tag{101}$$

Ce qui implique

$$\det H(f)(\mathcal{P}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathcal{P})\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathcal{P}) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathcal{P})\right)^2 = 4\exp -4 > 0. \tag{102}$$

Ceci avec le fait que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathcal{P} = 2\exp -2 > 0$ implique que $\mathcal{P} = (0,0)$ est un minimum

3. $f(x,y) = \cos(x+y) + \sin y$. Pour que f admet un point critique au point $\mathcal{P}$ il faut que $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathcal{P}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathcal{P}) = 0$. On calcule les derivees partielles pour avoir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin(x+y), \tag{103}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin(x+y) + \cos y. \tag{104}$$

Il faut donc

$$\cos y = 0 \text{ et } \sin(x+y) = 0. \tag{105}$$

Ce qui done (on utilise le fait que $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$)

$$y = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et } \cos x = 0. \tag{106}$$

Les points critiques sont $(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \times (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\cos(x+y) \tag{107}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\cos(x+y) - \sin y \tag{108}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = -\cos(x+y) \tag{109}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
\det H(f)(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 \\
&= (-\cos(x+y))(-\cos(x+y) - \sin y) - \cos^2(x+y) \\
&= \cos(x+y)\sin y \\
&= \cos x \cos y \sin y - \sin x \sin^2 y
\end{aligned} \tag{110}$$

Remplacant par $\mathcal{P} = (\frac{\pi}{2} + \alpha\,\pi, \frac{\pi}{2} + \beta\,\pi)$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, dans la precendente egalité pour trouver

$$\det H(f)(\mathcal{P}) = (-1)^{\alpha+1} \tag{111}$$

Il nous fallait de calculer

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha\,\pi + \frac{\pi}{2} + \beta\,\pi) = (-1)^{\alpha+\beta} \tag{112}$$

Nous avons les suivants

(a) pour α impaire (et donc $\det H(f)(\mathcal{P}) > 0$) et β impaire, $(\frac{\pi}{2} + \alpha\,\pi, \frac{\pi}{2} + \beta\,\pi)$ est un minimum

(b) pour α impaire (et donc $\det H(f)(\mathcal{P}) > 0$) et β paire, $(\frac{\pi}{2} + \alpha\,\pi, \frac{\pi}{2} + \beta\,\pi)$ est un maximum

(c) pour α paire, f n'admet pas d'extremum local en $(\frac{\pi}{2} + \alpha\,\pi, \frac{\pi}{2} + \beta\,\pi)$, i.e. $(\frac{\pi}{2} + \alpha\,\pi, \frac{\pi}{2} + \beta\,\pi)$ est un point selle.

On peut resumer les resultats (interessants)

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = f(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\,\pi, \frac{\pi}{2} + (2l+1)\,\pi) = -2,\ \forall\, k, l \in \mathbb{Z} \tag{113}$$

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = f(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\,\pi, \frac{\pi}{2} + 2l\,\pi) = 2,\ \forall\, k, l \in \mathbb{Z}. \tag{114}$$

4. $f(x,y) = (x+y)\exp -(x^2+y^2)$. Pour que f admet un point critique au point $\mathcal{P}$ il faut que $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathcal{P}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathcal{P}) = 0$. On calcule les derivees partielles pour avoir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \exp -(x^2+y^2) - 2x(x+y)\exp -(x^2+y^2) \\
&= \left(1 - 2x^2 - 2xy\right)\exp -(x^2+y^2)
\end{aligned} \tag{115}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \exp -(x^2+y^2) - 2y(x+y)\exp -(x^2+y^2) \\
&= \left(1 - 2y^2 - 2xy\right)\exp -(x^2+y^2).
\end{aligned} \tag{116}$$

Soit $\mathcal{P} = (x,y)$ un point critique, donc

$$1 - 2x^2 - 2xy = 0, \tag{117}$$

et

$$1 - 2y^2 - 2xy = 0. \tag{118}$$

Ce qui implique

$$y^2 - x^2 = 0. \tag{119}$$

Donc $y = x$ ou $y = -x$.

(a) si $y = x$. On remplace y par x dans (117) pour trouver

$$1 - 4x^2 = 0. \tag{120}$$

Ce qui implique que $(x, y) \in \{(1/2, 1/2), (-1/2, -1/2)\}$

(b) Le cas $y = -x$ est impossible car il nous donne dans (117) $1 = 0$

Pour determiner la nature des points critiques $(x, y) \in \{(1/2, 1/2), (-1/2, -1/2)\}$, on calcule les matrices Hessiennes au point quelconque (x, y). On calcule alors les derivees partielles d'ordre deux:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \big(-4x - 2y - 2x\left(1 - 2x^2 - 2xy\right)\big) \exp -(x^2 + y^2) \tag{121}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \big(-4y - 2x - 2y\left(1 - 2x^2 - 2xy\right)\big) \exp -(x^2 + y^2) \tag{122}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \big(-2x - 2y\left(1 - 2x^2 - 2xy\right)\big) \exp -(x^2 + y^2) \tag{123}$$

(a) la matrice Hessienne au point $\mathcal{P} = (1/2, 1/2)$:

$$\begin{aligned} \det H(f)(\mathcal{P}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathcal{P})\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathcal{P}) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathcal{P})\right)^2 \\ &= (-3\exp(-\frac{1}{2}))(-3\exp(-\frac{1}{2})) - (-\exp(-\frac{1}{2}))^2 \\ &= 8\exp(-1) > 0. \end{aligned} \tag{124}$$

Ceci avec le fait que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathcal{P}) = -3\exp(-\dfrac{1}{2}) < 0$ implique que le $\mathcal{P} = (1/2, 1/2)$ un maximum

(b) Par la meme maniere, on trouve que $\mathcal{P} = (-1/2, -1/2)$ un minimum

On resume

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y) = f(-1/2, -1/2) = -\exp(-\frac{1}{2}), \tag{125}$$

et

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y) = f(1/2, 1/2) = \exp(-\frac{1}{2}). \tag{126}$$

Une autre methode pour analyser les extrimums de $f(x, y) = (x + y)\exp -(x^2 + y^2)$: another idea is to set f as, with the help of polar cordinates, for $\rho \geq 0$ and $\theta \in [0, 2\pi[$

$$f(x, y) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \psi(\theta)\varphi(\rho), \tag{127}$$

where, using the fact $\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$

$$\psi(\theta) = \sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4}), \tag{128}$$

and

$$\varphi(\rho) = \rho\exp -\rho^2. \tag{129}$$

Thanks to simple study of the varation of the function φ (note that $\rho \geq 0$), we find

$$0 \leq \varphi(\rho) \leq \varphi(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp(-\frac{1}{2}), \ \forall\, \rho \geq 0. \tag{130}$$

On the other hand, using the expression (128) of ψ, we have

$$-\sqrt{2} = \psi(5\frac{\pi}{4}) \leq \psi(\theta) \leq \psi(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}, \ \forall\, \theta \in [0, 2\pi[. \tag{131}$$

Multiplying both sides of the previous inequality by $\varphi(\rho)$ (recall that $\varphi(\rho) \geq 0$) yields

$$-\sqrt{2}\varphi(\rho) = \psi(5\frac{\pi}{4})\varphi(\rho) \leq \psi(\theta)\varphi(\rho) \leq \psi(\frac{\pi}{4})\varphi(\rho) = \sqrt{2}\varphi(\rho), \ \forall \ \rho \geq 0, \ \forall \ \theta \in [0, 2\pi[. \tag{132}$$

Using inequatity (130), the previous inequality implies that

$$-\exp(-\frac{1}{2}) = \psi(5\frac{\pi}{4})\varphi(\frac{1}{\sqrt{2}}) \leq \psi(\theta)\varphi(\rho) \leq \psi(\frac{\pi}{4})\varphi(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \exp(-\frac{1}{2}), \ \forall \ \rho \geq 0, \ \forall \ \theta \in [0, 2\pi[. \tag{133}$$

This with definition (127) of f yields

$$-\exp(-\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \leq f(x,y) \leq f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \exp(-\frac{1}{2}), \ \forall \ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{134}$$

which is the same obtained result (125)–(126).

Solution de l'exercice 13.

1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$

   (a)
$$f_x(x,y) = 2x + y + 2 \tag{135}$$

   (b)
$$f_y(x,y) = x + 2y + 3 \tag{136}$$

   On trouve que f_x et f_y s'annullent au point $\mathcal{P} = (-1/3, -4/3)$. Donc $\mathcal{P} = (-1/3, -4/3)$ est un point critique. Pour savoir si le point $\mathcal{P}$ est un estrema, on calcule la matrice Hessianne $H(f)(\mathcal{P})$.

   (a)
$$f_{xx}(x,y) = 2, \tag{137}$$

   (b)
$$f_{yy}(x,y) = 2, \tag{138}$$

   (c)
$$f_{xy}(x,y) = 1. \tag{139}$$

   Donc
$$\det H(f)(\mathcal{P}) = 4 - 1 = 3 > 0. \tag{140}$$

   Ceci avec le fait $f_{xx}(\mathcal{P}) = 2 > 0$ implique que $\mathcal{P}$ est un minima.

   Remarquons que, comme $x^2 + y^2 + xy \geq \dfrac{x^2 + y^2}{2}$
$$f(x,y) \geq \frac{x^2 + y^2}{2} + 2x + 3y \tag{141}$$

   Ceci implique que
$$\lim_{\| (x,y) \|_2 \to +\infty} f(x,y) = +\infty \tag{142}$$

   Ceci implique que f admet un minimum globale. Ce minimum est le point $\mathcal{P}$.

2. $f(x,y) = x \exp(y) + y \exp(x)$. We first compute the critical points. A point $\mathcal{P} = (x_0, y_0)$ is a critical point if it resolves the systems : $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$. We compute the first derivatives of f

$$f_x(x,y) = \exp(y) + y \exp(x), \tag{143}$$

$$f_y(x,y) = x\exp(y) + \exp(x). \tag{144}$$

So, we have

$$\exp(y_0) + y_0\exp(x_0) = 0, \tag{145}$$

and

$$x_0\exp(y_0) + \exp(x_0) = 0. \tag{146}$$

Multiplying (146) by y_0 and subtracting the result from (145), we get

$$y_0 = \frac{1}{x_0}. \tag{147}$$

Substituting this in (145) to get

$$-x_0\exp\left(\frac{1}{x_0} - x_0\right) = 1, \tag{148}$$

which implies that $x_0 < 0$ and

$$\ln(-x_0) + \frac{1}{x_0} - x_0 = 0. \tag{149}$$

Let us set

$$\bar{x}_0 = -\frac{1}{x_0}. \tag{150}$$

This with (149) implies

$$\psi(x_0) = 0, \tag{151}$$

where, for $x > 0$

$$\psi(x) = -\ln(x) - x + \frac{1}{x}. \tag{152}$$

One remarks that $\psi(1) = 0$, we write and

$$\psi(x) = \psi(x) - \psi(1) = (x-1)\psi'(c_x), \tag{153}$$

where $c_x \in (1, x)$.

It is useful to remark that

$$\psi'(x) = -\frac{1}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} < 0, \ \forall x > 0. \tag{154}$$

So, thanks to (153), we get

$$\bar{x}_0 = 1, \tag{155}$$

and therefore thanks to (150) and (147), we get

$$(x_0, y_0) = (-1, -1). \tag{156}$$

To determine the type of the critical point $(x_0, y_0) = (-1, -1)$, we compute the determinent of the Hessian matrix of f at the point $(x_0, y_0) = (-1, -1)$. Let us first compute the second derivatives of f at the point $(x_0, y_0) = (-1, -1)$.

$$f_{xx}(x,y) = y\exp(x), \tag{157}$$

$$f_{yy}(x,y) = x\exp(y), \tag{158}$$

$$f_{xy}(x,y) = \exp(y) + \exp(x). \tag{159}$$

So

$$\det H(f)(x,y) = xy\exp(x+y) - \exp(2y) - \exp(2y) - 2\exp(x+y). \tag{160}$$

Which implies that

$$\det H(f)(-1,-1) = -3\exp(-2) < 0, \tag{161}$$

which yields that $(x_0, y_0) = (-1, -1)$ is not neither maximum nor minimum.

Therefore f has no extremums and then no global extremums.

We can also justify that f has not neither global maximum nor global minimum as follows; one remarks that

$$\lim_{x \to +\infty} f(x, y) = +\infty, \ \forall\, y > 0, \tag{162}$$

and

$$\lim_{x \to -\infty} f(x, y) = -\infty, \ \forall\, y \in \mathbb{R}. \tag{163}$$

one can conclude that f has not neither global maximum nor global minimum.