Université de Badji-Mokhtar -Annaba
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Concours de Formation Doctorale
Fonctions Spéciales

2015–2016

Epreuve: Différences Finies (Durée: 45m)

Exercice 1. Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$. On s'interesse au problème suivant:

$$-u_{xx}(x) + \frac{1}{1+x}u_x(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

avec

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{2}$$

On suppose que ce problème admet une solution unique $u \in H_0^1(0,1)$ et que $u \in \mathcal{C}^4[0,1]$.
On cherche une approximation pour le problème (1)–(2) par la méthode de Différences Finies.
Soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et considerons

$$h = \frac{1}{N+1}.$$

Pour chaque $i \in \{0, \ldots, N+1\}$, on pose

$$x_i = ih.$$

On note par u_i la valeur approchée rechercherée de u au point x_i.
On utilise les approximations centrées les plus simples de u_x et u_{xx} aux points x_i. On pose

$$u_h = (u_1, \ldots, u_N)^t.$$

1. Montrer que u_h est solution d'un système linéaire de la forme $A_h u_h = b_h$; donner A_h et b_h .
2. Montrer que le schéma numérique obtenu est consistant et donner une majoration de l'erreur de consistance (on rappelle que l'on a supposé $u \in \mathcal{C}^4[0,1]$).
3. Soit $v \in \mathbb{R}^N$, montrer que $A_h v \geq 0 \Rightarrow v \geq 0$ (ceci s'entend composante par composante). Cette propriété s'appelle conservation de la positivité.
4. On définit θ par
$$\theta(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^2 \ln(1+x) + \frac{2}{3}(x^2+2x)\ln(2), \quad x \in [0,1]. \tag{3}$$
Montrer qu'il existe une constante $C \geq 0$ independante de h tel que
$$\max_{i \in \{1,\ldots,N\}} \left| -\frac{1}{h^2}(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}) + \frac{1}{2h(1+x_i)}(\theta_{i+1} - \theta_{i-1}) - 1 \right| \leq Ch^2, \tag{4}$$
avec
$$\theta_i = \theta(x_i).$$