EPST, Deuxième Année **2010–2011**

Examen 1 en Analyse

Exercice 1. Soit f la fonction definie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 - xy^2$.

1. Montrer que $(0,0)$ est le seul point critique de f.
2. Soit λ un nombre réel donné. Montrer que la restriction de f à l'ensemble $\{(x, \lambda x),\ x \in \mathbb{R}\}$ admet en $(0,0)$ un minimum local.
3. Montrer que la restriction de f à l'ensemble $\left\{(\frac{y^2}{4}, y),\ y \in \mathbb{R}\right\}$ n'admet pas en $(0,0)$ un minimum local. En deduire que $(0,0)$ n'est pas un extremum.

Exercice 2. I) Soit Γ la courbe paramétrée représentée par la fonction

$$f(t) = \begin{cases} x(t) = \dfrac{t+1}{t^3}, \\ y(t) = \dfrac{t-1}{t^2} \end{cases}$$

a) Montrer que la courbe Γ est régulière sur son domaine de définition.

b) La courbe Γ est -elle birégulière?

c) Le point $M(1)$ est il (Justifier votre réponse sans faire de calcul) :

1. · un point ordinaire,
2. · un point de rebroussement de première espèce,
3. · un point de rebrousement de deuxième espèce,
4. · un point d'inflexion.

d) Faire l'étude des branches infinies en $t_0 = 0$.

e) Donner le tableau de variations de f.

II) Soit C la courbe d'équation polaire $\rho(t) = \tan\left(\dfrac{2t}{3}\right)$

a) Donner le plus petit intervalle d'étude, en indiquant toutes les symétries possibles.

Exercice 3. On pose :

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1\right\}$$

1. En effectuant un changement de variables convenables, calculer l'intègrale double suivante
$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{dxdy}{1 + x^2 + y^2}$$
2. Calculer l'aire du domaine Δ limitée par les droites $x = -1, x = 1$ et les courbes $y = 4 - x^3$ et $y = x^2$

Exercice 4. Trouer le volume intèrieur à l'ellipsoide d' equation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

où a, b et c désignent trois réels strictement positifs.