Ecole Préparatoire aux Sciences et Techniques (EPST)–Annaba
Module Analyse II
2015–2016

Série 7: Les Intégrales Généliséées

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes:

$$1.\ \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} \qquad 2.\ \int_4^{+\infty} \exp\left(-\sqrt{x}\right) \qquad 3.\ \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$$

Exercice 2.

1. Epliquer pourquoi les intégrales suivantes peuvent être considerées au sens généralisé et déterminer leur nature:

$$1.\ \int_0^1 \ln x dx \qquad 2.\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1} dx \qquad 3.\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+\sqrt{x^3+1}} \qquad 4.\ \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2\pi x)}{1+x^2} dx$$

$$5.\ \int_0^1 \frac{\exp(x)}{x} dx \qquad 6.\ \int_0^1 \frac{1+x^2}{x^2} dx \qquad 7.\ \int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx \qquad 8.\ \int_{-1}^{+\infty} \frac{e^{\cos x}}{x} dx$$

$$9.\ \int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{t}} dt \qquad 10.\ \int_0^{+\infty} 1 + t \ln\left(\frac{t}{1+t}\right) dt.$$

2. Montrer que l'integrale suivante est convergente si et seulement si $p > 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p} dx$$

Exercice 3. Montrer que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente mais pas abosulement convergente (on dit alors qu'elle est semi-convergente).

Exercice 4.
Rappelons Theoreme d'Abel: Soit f et g deux fonctions localement integrables sur $[a, b[$ et verifiant:

1. f est monotone et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = 0$,
2. Existe k tel que, pour tout $x \in [a, b[$: $|\int_a^x g(t)dt| \leq k$.

Alors l'integrale $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$ est convergente.

1. En utilisant, le Theoreme d'Abel, prouver que les integrales suivantes sont convergentes

$$1.\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \qquad 2.\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t} dt.$$

2. En deduire la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}+\cos t}\,dt.$$

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction integrable sur tout intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$, continue en 0 et telle que $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx$ soit convergente.

1. Montrer que l'integrale suivante est convergente

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{f(\beta x)-f(\alpha x)}{x}dx, \tag{1}$$

pour tout $0 < \beta < \alpha$.

2. Calculer $I(\alpha,\beta)$.