REMERCIEMENTS

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu **Allah** qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de se travail.
Je tient à remercier tout d'abord mon encadreur
le Professeur Bradji à l'université d'Annaba de m'avoir proposé ce sujet de recherche. La clarté et la précision de son rapport montrent à quel point il s'est investi dans ce travail. Ses critiques et ces conseils me sont d'ores et déjas précieux.
De même je remercie Mrs Ammar Makhlouf et Abd Elouaheb Salmi d'avoir bien voulu faire partie du jury.
Et en fin j'adresse mes s'incère remerciments a mes parents, mes frères, ma soeur, et a touts mes amis.

Dédicace

Je dédie ce mémoire a mes chers parents à qui je dois tout ce travail est le fruit de leur

amour, leurs encouragement et sacrifices

A ma chére mére

A mon cher pére

A ma chére soeur Wassila

A mes frères Mouhamed, A.Hafidh, Ilyess.

A mes amis Radia, Sara, Amani sara.

A toutes mes amies et toute personne qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

HABIBA

Résumé

Les équations différentièlles fractionnaires sont des généralisations des équations différentièlles partielles classiques.

Dans ce travail, nous étudions l'approximation numérique de la solution d'un problème differentiel fractionnaire dans un intervalle fini de $\mathbb{R}$ par la méthode des différences finies, en utilusons la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Les résultats de stabilité et de convergence de la méthode sont prouvés.

Abstract

Fractional order differential equations are generalisations of classical partial differential equations.

This work is concerned with the approximation of the solution for initial boundary value fractional partial differential equation on a finite domain, by finite difference schemes. We interest in the case of Riemann-Liouville derivative.

Stability and convergence of the method are discussed.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles fractionnaires et les équations différentielles partielles ont été discutées par beaucoup d'auteurs comme généralisations des équations différntielles et partielles classiques. Ils apparaissent dans le flux de fluide, les finances, les sciences biologiques et d'autres. Les équations differentielles fractionnaires et partielles ont attiré une attention considérable en raison de leurs applications dans plusieurs secteurs.

En conséquence, il est utile de regarder l'approximation de cette grande classe des équations différentielles et partielles.

Le but de ce travail est d'initier pour l'approximation numérique des équations différentielles fractionnaires et des équations partielles. Puisque, la méthode numérique de base est la méthode des différences finies, nous avons essayé d'étudier d'abord l'approximation par différences finies des équations différentielles fractionnaires.

Comme modèle, nous avons étudié l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^{\alpha} u(x,t)}{\partial x^{\alpha}} + S(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,T\ ] \tag{1}$$

où $\Omega = (0,1), 1 < \alpha < 2, T > 0$ est donné et l'operateur différentiel fractionnaire d'ordre α est donné par

$$\frac{\partial^{\alpha} u(x,t)}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \frac{u(\zeta)}{(x-\zeta)^{\alpha+1-n}} d\zeta. \tag{2}$$

Une condition initial est donnée par

$$u(x,0) = \ u_0(x), \qquad x \in \Omega. \tag{3}$$

Les conditions aux limites considérées ici sont de type Dirichlet homogène :

$$u(0,t) = 0,\ \ u(1,t) = 0 \qquad t \in (0,T\ ] \tag{4}$$

L'existence et unicité de u de (1) - (4) peut être justifié dans le cadre du semigroupe, voir [2].

Nous avons visé de ce travail à fournir une méthode de volume finie pour (1) - (4) qui n'ont pas été traitées avant.

Pour la perfection, nous avons commencé par le cas $\alpha = 2$ qui est cas parabolique, et $\alpha = 1$ qui est le cas hyperbolique et alors nous nous sommes déplacés au cas fractionnaire $\alpha \in (1, 2)$.

Pour mieux comprendre, nous avons considéré quelques fois le schéma explicite.

Nous devrions mentionner finalement que nous voudrions au debut de présenter les premières idées sur un schéma volume fini, voir [6], pour (1) - (4), qui est très nouveau, mais en raison du temps limité nous avons seulement essayé de comprendre les idées fondamentales de l'approximation équations différentielles fractionnaires et des équations différentielles partielles. L'étude de la méthode de volume finie pour (1) - (4) sera le sujet d'une future recherche.

Introduction and an overview on the work

Fractional diferntial and partial diferential equations have been discused by many authors as generalizations of classical diferntial and partial diferential equations. They appear in fluid flow, finance, biological sciences and others. Fractional diferntial and partial diferential equations have attracted considerable attention because of their applications in several areas.

Consequently, it is useful to look on the approximation of this large class of diferential and partial diferential equations.

The aim of this work is to initiate for the numerical approximation of the fractional diferential and partial diferential equations. Since, the basic numerical method is Finite Diference methods, we have tried to study first the finite diference approximation of fractional diferential and partial diferential equations.

As model, we have studied the following fractional partial dierential equation :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} + S(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,T\ ] \tag{1}$$

where $\Omega = (0,1), 1 < \alpha < 2, T > 0$ is given and the fractional diferential operator $\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}$ is given by

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \frac{u(\zeta)}{(x-\zeta)^{\alpha+1-n}} d\zeta. \tag{2}$$

An initial condition is given by

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \Omega. \tag{3}$$

Homogeneous Dirichlet boundary conditions are given by

$$u(0,t) = 0, \ u(1,t) = 0 \qquad t \in (0,T\ ] \tag{4}$$

Well posedness (Existence and uniqueness of u) of (1) - (4) can be justified in the framework of semi-groupe, see [2].

We aimed from this work to provide a finite volume method for (1) - (4) which has not been treated before.

For the sake of completeness, we have began by the cases $\alpha = 2$ which is parabolic case, and $\alpha = 1$ which is hyperbolic case and then we moved to the fractional case $\alpha \in (1, 2)$.

For the sake of simplicity, we considered some times the explicit schemes.

We should mention finally that we would like to present the first ideas on a finite volume scheme, see [6], for (1) - (4), which is very new, but because of limited time we only tried to understand the basic ideas of the approximation of fractional diferential and partial diferential equations. The

task of finite volume method for (1) - (4) will be the subject of a future research.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous introduisons le théorème connu de convergence et quelques définitions et théorèmes importantes, un rappel sur les semi-groupes et le concept de dérivation fractionnaire. Ensuite nous donnons le théorème de Gershgorin, et la formule de Grünwald.

1.1 Relation entre la stabilité, la consistance et la convergence

Definition 1.1.1 *(de la stabilité) (cf. [4]). Etant donné le problème aux limites différentiel*

$$Lu = f, \tag{1.1}$$

on calcule approximativement sa solution u en construisant un schéma aux différences

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)} \tag{1.2}$$

qui approche ce problème pour u à un certain ordre k en h. Cela signifie que le résidu $\delta f^{(h)}$

$$L_h[u]_h = f^{(h)} + \delta f^{(h)},$$

apparu en substituant la table $[u]_h$ de la solution u dans (1.2), vérifie une esti-

mation de la forme

$$\left\|\delta f^{(h)}\right\|_{F_h} \leq C_1 h^k, \tag{1.3}$$

avec C_1 une constante indépendante de h.

Théorème 1.1.2 *Si le schéma aux différences $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$ approche le problème $Lu = f$ pour la solution u à l'ordre k en h et est stable, alors la solution $u^{(h)}$ du problème aux différences $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$ converge vers $[u]_h$ et on a l'estimation*

$$\left\|[u]_h - u^{(h)}\right\|_{U_h} \leq Ch^k,$$

avec C est une constante indépendante de h.

1.2 Espaces $\boldsymbol{L}_P$, et Espaces $\boldsymbol{C}^n$

Espace $\boldsymbol{L}_P$

Les espaces $\boldsymbol{L}_P$ sont des espaces de fonctions dont la puissance $p - ième$ de la fonction est intégrable, au sens de Lebesgue.

Soit $\Omega = [a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$.

Definition 1.2.1 *(cf. [2]). On note par $\boldsymbol{L}_P(a, b)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ l'espace des fonctions f mesurables integrables au sens de Lebesgue a valeurs réelles dans Ω telle que la norme $\|f\|_p < +\infty$, où*

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leq p \leq +\infty)$$

et pour $p = +\infty$ on a :

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

et $\mathbf{L}^\infty(a, b)$ est l'espace des fonctions essentièllement bornées sur (a, b).

Espace $\boldsymbol{C}^n[a,b]$

Definition 1.2.2 *(cf. [2]). Soit* $\Omega = [a,b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ *et* $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, ...\}$.

Soit $\boldsymbol{C}^n(\Omega)$ *l'espace des fonctions* f *qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à* n *continues sur* Ω, *muni de la norme*

$$\|f\|_{\boldsymbol{C}^n} = \sum_{k=0}^{n} \left\|f^{(k)}\right\|_{\boldsymbol{C}} = \sum_{k=0}^{n} \max_{x\in\Omega} \left|f^{(k)}(x)\right|, \quad n \in \mathbb{N}$$

En particulier si $n = 0$, $\boldsymbol{C}^0(\Omega) = \boldsymbol{C}(\Omega)$ l'espace des fonctions f continues sur Ω, muni de la norme

$$\|f\|_{\boldsymbol{C}} = \max_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

Definition 1.2.3 *On note par* $\boldsymbol{C}([a,b],\mathbb{R})$ *l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *muni de la norme :*

$$\|f\|_{\infty} = \sup\{|y(t)| : \ t \in [a,b]\}$$

Definition 1.2.4 *(Fonction analytique)*

Une fonction f *d'un ouvert* U *de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$ *est dite analytique sur* U *si quelque soit* $z_0 \in \mathbb{C}$, *il existe une série entière*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

qui converge sur une boule ouverte non vide de centre z_0 *vers* $f(z)$.

Cette série entière est le développement de f *en série entière autour de* z_0.

1.3 Semi-groupes d'opérateurs linéaires

Definition 1.3.1 *Soient X et Y deux espaces de Banach. On appelle opérateur borné toute application linéaire continue de X dans Y.*

Definition 1.3.2 *On dit que la famille d'opérateurs bornés $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur X est un semi- groupe si :*

(i)$T(0) = I$; où I est l'opérateur identité.
(ii)$\forall t \geq 0,\ s \geq 0\ T(t+s) = T(t)T(s)$;
Si de plus $\lim\limits_{t\to 0} T(t)x = x, \quad \forall x \in X$,on dit que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu ou (un C_0-semigroupe).

On dit que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu si

$$\lim_{t\to 0} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(x)} = 0$$

On définit le générateur infinitésimal A d'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ comme l'opérateur non borné

$$A : D(A) \subset X \to \ X,$$

où

$$D(A) = \{x \in X : \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T(t)x - x) \text{ existe}\}$$

est le domaine de A.

et

$$\forall x \in D(A), Ax = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T(t)x - x)$$

1.4 Transformée de Fourier sur $\boldsymbol{L}^1$

Definition 1.4.1 *(cf. [5]). La tronsformée de Fourier de $u \in \boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^d)$ est*

$$F(u(\zeta)) = \hat{u}(\zeta) = \int e^{-ix.\zeta} u(x)dx;$$

où $x.\zeta = x_1.\zeta_1 + ... + x_d.\zeta_d$ *pour* $x,\ \zeta \in \mathbb{R}^d$. *L'application* $u \to \hat{u}$ *s'appelle la tronsformation de Fourier.*

Théorème 1.4.2 *La tronsformation de Fourier est linéaire de* $\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^d)$ *vers* $\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ *et*

$$\|\hat{u}\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^d)}$$

De plus, pour toute $u \in \boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{u}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^d$.

Théorème 1.4.3 *(Théorème de translation)*

Soit f *une fonction sommable, et* $b \in \mathbb{R}$, *alors on a :*

$$F[f(x+b)](\zeta) = e^{ikb}F[f](\zeta)$$

Théorème 1.4.4 *Transformée de Fourier de la dérivée*

Soit f *une fonction sommable et partout continue, dérivable presque partout et telle que* f' *soit sommable. Alors*

on a :

$$F[f'](\zeta) = ikF[f](\zeta)$$

Théorème 1.4.5 *généralisation*

Soit f *telle que ses* $m-1$ *dérivées existent et soient sommables, partout continues, et telle que la dérivée d'ordre* m *de* f *existe presque partout et soit sommable. Alors :*

$$Ff^{(m)}(\zeta) = (ik)mF[f](\zeta)$$

1.5 Le théorème de Gerschgorin

Soit $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, et n est un entier strictement positif.

Definition 1.5.1 *Soit* $A \in Mn$. *Les valeurs propres* $\lambda_i = \lambda_i(A),\ i \in \{1, ..., n\}$ *d'une matrice* A *d'ordre* n *sont les* n *racines, réelles ou complexes, distinctes ou confondues,* *du polynôme caractéristique*

$$PA : \lambda \in \mathbb{C} \rightarrow PA(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

de la matrice A.

Definition 1.5.2 *(cf. [10]). Soit $M = (a_{ij}) \in M_n\ (\mathbb{K}\ )$.*

Pour tout $i \in [1, n]$ on nomme

$$D_i = B_f \left(a_{ii}, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \right) = \left\{ x \in \mathbb{K} \setminus\ |a_{ii} - x| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

Le ième disque de Gerschgorin de M, où B_f désigne la boule fermée.

Théorème 1.5.3 *Théorème de Gerschgorin (cf. [10]).*

Soit $M \in M_n\ (\mathbb{K}\ )$.

L'ensemble des valeurs propres est inclus dans la réunion des disques de Gerschgorin, c'est à dire :

λ est une valeur propre de $M \Longrightarrow \lambda \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$.

1.6 La fonction de Gamma

On présente la définition et quelques propriétés de la fonction gamma d'Euler. Pour plus des détailes voir Erdélyi ([5], Vol. 1, Chapter 1).

Definition 1.6.1 *La fonction gamma d'Euler $\Gamma(z)$ est définie par*

$$\Gamma(z) = \int_a^b t^{z-1} e^{-t} dt \qquad (Re(z) > 0),$$

où

$$t^{z-1} = e^{(z-1)\log(t)}$$

Cette intégrale est convergente pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$ $(Re(z) > 0)$.

Remarque 1.6.2 *La fonction gamma d'Euler possède la propriété suivante*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (Re(z) > 0) \tag{1.4}$$

On utilise cette relation pour prolonge la fonction gamma d'Euler sur le demi plan $Re(z) \leq 0$, *on obtient alors*

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n} \quad (Re(z) > -n;\ n \in \mathbb{N};\quad z \notin \mathbb{Z}_0^- := \{..., -2, -1, 0\}) \tag{1.5}$$

Ici $(z)_n$ *désigne le symbole de Pochhamer défini pour un complexe* $z \in \mathbb{C}$ *et un entier non-négatif* $n \in \mathbb{N}_0$ *par*

$$(z)_0 = 1 \text{ et } (z)_n = z(z+1)...(z+n-1) \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Les équations (1.4) et (1.5) donnent alors

$$\Gamma(z+1) = (1)_n = n! \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

avec $0! = 1$.

Propriétés : On détermine quelques propriétés de la fonction gamma.

1. $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ $(\ z \notin \mathbb{Z}_0;\ 0 < Re(z) < 1);\ \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
2. $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$
3. $\Gamma(-z) = -\frac{\Gamma(1-z)}{z}$

1.7 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Definition 1.7.1 *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouuville d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}$ est définie par*

$$\frac{\partial^\alpha \Phi(x,t)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{\Phi(\zeta)}{(x-\zeta)^{\alpha+1-n}} d\zeta$$

où n est un entier tel que $n-1 < \alpha \leq n$.

1.8 La formule de Grünwald

Proposition 1.8.1 *(cf. [10]). Soit $L \leq x \leq R$, et soit $1 < \alpha < 2$, $f \in \boldsymbol{C}^{n+3}(\mathbb{R})$ tel que tous les dérivées de f d'ordre infèrieur ou égale à $n+3$ apartient à $\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R})$.*

Soit $h > 0$, pour un certain entier $p \geq 0$, on définie la formule de Grünwald :

$$\Delta_{h,p}^\alpha f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\begin{array}{c} \alpha \\ j \end{array} \right) f(x-(j-p)h) \tag{1.6}$$

Alors, si $L = -\infty$, on a :

$$h^{-\alpha} \Delta_{h,p}^\alpha f(x) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) + \sum_{l=1}^{n-1} \left(a_l \frac{d^{\alpha+l}}{dx^{\alpha+l}} f(x) \right) h^l + O(h^n) \tag{1.7}$$

uniformement sur $x \in \mathbb{R}$, a_l constants indépendants de h, f, et x.

Preuve 1 *Remarquant que notre conditions sur f implique que pour un certain constant $C_1 > 0$, on a*

$$\left| \hat{f}(\zeta) \right| \leq C_1 (1+|k|)^{-n-3} \tag{1.8}$$

pour tout $k \in \mathbb{R}$, où $\hat{f}(\zeta)$ est la tronsformation de Fourier de f. Si $L = -\infty$, alors $F[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x)](\zeta) = (-ik)\hat{f}(\zeta)$.

On a aussi pour $a \in \mathbb{R}$: $F[f(x-b)](\zeta) = e^{ikb}\ \hat{f}(\zeta)$, *et*

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ j \end{array} \right) z^j$$

qui converge absolument pour $|z| \leq 1$. *Parce que* $\Delta_{h,p}^{\alpha} f(x) \in \boldsymbol{L}^1(\mathbb{R})$ *alors*

$$\begin{aligned} F(h^{-\alpha}\Delta_{h,p}^{\alpha} f(x))(\zeta) &= h^{-\alpha} e^{-ikph} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\begin{array}{c} \alpha \\ j \end{array} \right) e^{ijkh} \hat{f}(\zeta) \\ &= h^{-\alpha} e^{-ikph} (1-e^{ikh})^{\alpha} \hat{f}(\zeta) \\ &= (-ik)^{\alpha} \left(\frac{1-e^{ikh}}{-ikh} \right)^{\alpha} e^{-ikph} \hat{f}(\zeta) \\ &= (-ik)^{\alpha} \omega_{\alpha,p}(-ikh) \hat{f}(\zeta) \qquad (1.9) \end{aligned}$$

où $\omega_{\alpha,p}(z) = \left(\frac{1-e^{-z}}{z}\right)^{\alpha} e^{pz}$ *avec* $z = -ikh$. *Parce que la fonction* $\omega_{\alpha,p}(z)$ *est analytique dans un voisinage de l'origine, on a* $\omega_{\alpha,p}(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l z^l$,*qui converge absolument pour* $|z| \leq R$ *et pour certain* $R > 0$.

Notons que $a_0 = 1$ *et* $a_1 = \frac{-\alpha}{2} + p$. *On remmarque qu'il existe un constant* $C_2 > 0$ *tel que*

$$\left| \omega_{\alpha,p}(-ix) - \sum_{l=0}^{n-1} a_l (-ix)^l \right| \leq C_2 \left|x\right|^n \qquad (1.10)$$

uniformement sur $x \in \mathbb{R}$: *Pour* $|x| \leq R$, *on a*

$$\left| \omega_{\alpha,p}(-ix) - \sum_{l=0}^{n-1} a_l (-ix)^l \right| = \left| \sum_{l=n}^{\infty} a_l (-ix)^l \right| \leq |x|^n \sum_{l=n}^{\infty} |a_l| \, |x|^{l-n} \leq C_3 \left|x\right|^n$$

où $C_3 = R^{-n} \sum_{l=0}^{\infty} |a_l| \, R^l < \infty$, *lorsque* $|x| > R$ *on a*

$$|\omega_{\alpha,p}(-ix)| = \left| \left(\frac{1-e^{ix}}{-ix} \right)^{\alpha} e^{-ipx} \right| \leq \frac{2^{\alpha}}{R^{\alpha}} \leq C_3 \left|x\right|^n$$

où $C_4 = \frac{2^\alpha}{R^{\alpha+n}} < \infty,$ *et*

$$\left|\sum_{l=0}^{n-1} a_l(-ix)^l\right| \leq |x|^n \sum_{l=0}^{n-l} |a_l|\,|x|^{l-n} \leq C_5\,|x|^n$$

où $C_5 = \sum_{l=0}^{n-1} |a_l|\, R^{l-n} < \infty,$

Si on prend $C_2 = \max\{C_3, C_4 + C_5\}$ *alors l'inégalité (1.10) est vérifiée pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

D'après (1.9), en peut écrire

$$F(h^{-\alpha}\Delta^\alpha_{h,p} f(x))(\zeta) = \sum_{l=0}^{n-l} a_l(-i\zeta)^{\alpha+l} h^l \hat{f}(\zeta) + \Phi(x,h),$$

avec

$$|\Phi(x,h)| = \left|C\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}\hat{\Phi}(\zeta,h)d\zeta\right| \leq C\int_{\mathbb{R}} \left|\hat{\Phi}(\zeta,h)\right| d\zeta \leq Ch^n$$

uniformement sur $x \in \mathbb{R}$. ■

Remarque 1.8.2 *Si* $n = 1,\ p = 1$ *et la fonction* f *est égale à* 0 *dans les frontières, la formule de Grünwald devient*

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{N} g_k u(x-(k-1)h,t) + O(h).$$

Cette formule nous donnera la consistance du schéma de différences finies pour le cas fractionnaire.

Chapitre 2

Schéma de différences finies pour le cas $\alpha = 2$ dans (1)

Le but de ce chapitre est de considérer le cas particulier $\alpha = 2$ dans (1) pour comprendre l'approximation de l'équation différentielle fractionnaire. le cas $\alpha = 2$ dans (1) est un problème parabolique.

2.1 Problème parabolique

On considère le problème en une dimension d'espace. Au temps $t = 0$, on se donne une condition initiale u_0, et on considère des conditions aux limites de type Dirichlet homogène. Le problème unidimensionnel s'écrit :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \quad \forall x \in]0,1[, \ \forall t \in]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x), \ \forall x \in]0,1[\\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \ \forall t \in]0,T[\end{cases} \tag{2.1}$$

où $u(x,t)$ représente la température au point x et au temps t, u_t désigne la dérivée partielle première de u par rapport à t et u_{xx} la dérivée partielle seconde de u par rapport à x.

On admettra le théorème d'existence et unicité suivant :

Théorème 2.1.1 $\Big($*Résultat d'existence et unicité* $\Big)$ *Si* $u_0 \in C(]0,1[,\mathbb{R})$ *alors il existe une unique fonction* $u \in C^2(]0,1[\times]0,T[,\mathbb{R}) \cap C([0,1]\times[0,T],\mathbb{R})$ *qui vérifie (2.1).*

Proposition 2.1.2 $\Big($*Principe du maximum*$\Big)$ *Sous les hypothèses du théorème 2.1.1, soit* u *la solution du problème (2.1) ;*

1. *si* $u_0(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in [0,1]$, *alors* $u(x,t) \geq 0$, *pour tout* $t \geq 0$ *pour tout* $x \in]0,1[$.
2. $\|u\|_{L^\infty([0,1[\times]0,T[)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(]0,1[)}$.

Ces dernières propriétés peuvent être importantes dans le modèle physique.

Pour calculer une solution approchée, on se donne une discrétisation en temps et en espace. La discrétisation consiste donc à se donner un ensemble de points $t_n,\ n = 1,...,M$ de l'intervalle $]0,T[$, et un ensemble de point $x_i,\ i = 1,...,N$.

Pour simplifiier, on considère un pas constant en temps et en espace. Soit : $h = \frac{1}{N+1} = \Delta x$ le pas de discrétisation en espace, et $k = \Delta t = \frac{T}{M}$, le pas de discrétisation en temps. On pose alors $t_n = nk$ pour $n = 0,...,M$ et $x_i = ih$ pour $i = 0,...,N+1$. On cherche à calculer une solution approchée u_D du problème (.1.4) ; plus précisement, on cherche à déterminer $u_D(x_i,t_n)$ pour $i = 1,...,N$, et $n = 1,...,M$. Les inconnues discrètes sont notées u_i^n, $i = 1,...,N$, et $n = 1,...,M$.

2.1.1 Le schéma explicite

L'approximation en temps par la méthode d'Euler explicite consiste à écrire la première équation de (2.1) en chaque point x_i et temps t_n, à approcher la dérivée en temps $u_t(x_i,t_n)$ par le qoutient différentiel :

$$\frac{u(x_i,t_{n+1}) - u(x_i,t_n)}{k}$$

et la dérivée en espace $-u_{xx}$ par le qoutient différentiel :

$$\frac{1}{h^2}(2u(x_i,t_n) - u(x_{i+1},t_n) - u(x_{i-1},t_n))$$

On obtient le schéma suivant :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{k} + \frac{1}{h^2}(2u_i^n - u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) = 0, \ i = 1, ..., N, \ n = 1, ..., M, \\ u_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 1, ..., N, \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \quad \forall \ n = 1, ..., M. \end{cases} \tag{2.2}$$

Le schéma est dit explicite, car la formule ci-dessus donne u_i^{n+1} de manière explicite en fonction des $(u_i^n)_{i=1,...,N}$.

En effet on a :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(2u_i^n - u_{i+1}^n - u_{i-1}^n),$$

avec $\lambda = \frac{k}{h^2}$.

Consistance du schéma

Soit $\bar{u}_i^n = u(x_i, t_n)$ la valeur exacte de la solution en x_i et t_n. L'erreur de consistance R_i^n en (x_i, t_n) peut s'écrire comme la somme des erreurs de consistance en temps et en espace : $R_i^n = \tilde{R}_i^n + \hat{R}_i^n$avec :

$$\tilde{R}_i^n = \frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{k} - u_t(x_i, t_n) \text{ et } \hat{R}_i^n = \frac{1}{h^2}(2\bar{u}_i^n - \bar{u}_{i+1}^n - \bar{u}_{i-1}^n) + u_{xx}$$

Proposition 2.1.3 *Le schéma (.2.2) est consistant d'ordre* 1 *en temps et d'ordre* 2 *en espace, c'est à dire qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de u tel que :*

$$|R_i^n| \leq C(k + h^2) \tag{2.3}$$

Preuve 2 *D'après la définition de l'erreur de consistance, on a :*

$$R_i^n = \frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{k} - u_t(x_i, t_n) \ + \frac{1}{h^2}(2\bar{u}_i^n - \bar{u}_{i+1}^n - \bar{u}_{i-1}^n) + u_{xx}$$

$$R_i^n = (-u_t(x_i, t_n) + u_{xx}) + \frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{k} + \frac{1}{h^2}(2\bar{u}_i^n - \bar{u}_{i+1}^n - \bar{u}_{i-1}^n)$$

On sait que $-u_t(x_i, t_n) + u_{xx} = 0$, *alors :*

$$R_i^n = \frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{k} + \frac{1}{h^2}(2\bar{u}_i^n - \bar{u}_{i+1}^n - \bar{u}_{i-1}^n)$$

à l'aide des développement de Taylor, on a

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{k} &= \frac{1}{k}\left\{\bar{u}_i^n + k\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\right)_i^n + \frac{k^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\right)_i^n + ... - \bar{u}_i^n\right\} \\ &= \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\right)_i^n + \frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\right)_i^n + ... \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2}(2\bar{u}_i^n - \bar{u}_{i+1}^n - \bar{u}_{i-1}^n) &= \frac{1}{h^2}\left\{\begin{array}{c} 2\bar{u}_i^n - \bar{u}_i^n - h\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)_i^n - \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\right)_i^n - \frac{h^3}{6}\left(\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^3}\right)_i^n - ... \\ -\bar{u}_i^n + h\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)_i^n - \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\right)_i^n + \frac{h^3}{6}\left(\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^3}\right)_i^n - ... \end{array}\right\} \\ &= -\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\right)_i^n - \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial x^4}\right)_i^n + ... \end{aligned}$$

Alors :

$$R_i^n = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\right)_i^n + \frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\right)_i^n - \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\right)_i^n - \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial x^4}\right)_i^n + ...$$

ce ci implique, en utilusant (2.1)

$$R_i^n = \frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\right)_i^n - \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial x^4}\right)_i^n + ... = O(k + h^2) \underset{h,k \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc le schéma est consistant. ■

La stabilité

On a vu à la proposition 2.1.2 que la solution exacte vérifie :

$$\|u\|_{L^\infty([0,1[\times]0,T[)} \leq \|u\|_{L^\infty(]0,1[)} .$$

Si on choisit correctement les pas de temps et d'espace, nous allons voir qu'on peut avoir l'équivalent discret sur la solution approchée, voir proposition 2.1.5.

Definition 2.1.4 *On dit qu'un schéma est L^∞-stable si la solution approchée est bornée dans L^∞ indépendamment du pas du maillage.*

Proposition 2.1.5 *Si la condition de stabilité*

$$\lambda = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2} \tag{2.4}$$

est vérifiée, alors le schéma (.2.2) est L^∞-stable au sens au :

$$\sup_{\substack{i=1,\dots,N \\ n=1,\dots,M}} |u_i^n| \leq \|u_0\|_\infty$$

Preuve 3 *On peut écrire le schéma (.2.2) sous la forme :*

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(2u_i^n - u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

soit encore :

$$u_i^{n+1} = (1-2\lambda)u_i^n + \lambda u_{i-1}^n + \lambda u_{i+1}^n$$

Si $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$, on a $\lambda \geq 0$ et $1-2\lambda \geq 0$, et la quantité u_i^{n+1} est donc combinaison convexe de u_i^n, u_{i-1}^n et u_{i+1}^n. Soit $M^n = \max\limits_{i=1,\dots,N} u_i^n$, on a alors :

$$u_i^{n+1} \leq (1-2\lambda)M^n + \lambda M^n + \lambda M^n, \quad \forall\ i = 1, \dots, N,$$

et donc

$$u_i^{n+1} \leq M^n$$

En passant au maximum, en déduit :

$$M^{n+1} \leq M^n$$

De la mème manière, on montre que :

$$\min_{i=1,\ldots,N} u_i^{n+1} \geq \min_{i=1,\ldots,N} u_i^n$$

Alors, en déduit $\max\limits_{i=1,\ldots,N} u_i^{n+1} \leq \max\limits_{i=1,\ldots,N} u_i^0$ *et* $\min\limits_{i=1,\ldots,N} u_i^{n+1} \geq \min\limits_{i=1,\ldots,N} u_i^0$ *d'où le résultat de stabilité.* ■

La convergence

Definition 2.1.6 *Soit u la solution du problème (2.1) et* $(u_i^n)_{\substack{i=1,\ldots,N \\ n=1,\ldots,M}}$ *la solution de (2.2). On appelle erreur de discrétisation au point (x_i, t_n) la quantité $e_i^n = u(x_i, t_n) - u_i^n$.*

Théorème 2.1.7 *Sous les hypothèses du théorème 2.1.1, et sous la condition de stabilité (2.4), il existe $C \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de u tel que :*

$$\left\| e_i^{n+1} \right\|_\infty \leq \left\| e_i^0 \right\|_\infty + TC(k + h^2), \text{ pour tout } \; i = 1, \ldots, N, et\; n = 0, \ldots, M - 1.$$

Ainsi, si $\|e_i^0\|_\infty = 0$, alors $\max\limits_{i=1,\ldots,N} \|e_i^n\|$ *tend vers* 0 *lorsqu k et h tendent vers* 0*, pour tout $n = 1, \ldots, M$. Le schéma (2.2) est donc convergent.*

Preuve 4 *On note $\bar{u}_i^n = u(x_i, t_n)$. On a donc par définition de l'erreur de consistance R_i^n,*

$$\frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{k} + \frac{1}{h^2}(2u_i^n - u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) = R_i^n \tag{2.5}$$

D'autre part le schéma numérique s'écrit :·

*On fait la soustraction entre (2.5) et (**??**), on obtient au vu de la définition de e_i :*

$$\frac{e_i^{n+1} - e_i^n}{k} + \frac{1}{h^2}(2e_i^n - e_{i+1}^n - e_{i-1}^n) = R_i^n$$

soit encore :

$$e_i^{n+1} = (1-2\lambda)e_i^n + \lambda e_{i-1}^n + \lambda e_{i+1}^n + kR_i^n$$

car $\lambda \leq \frac{1}{2}$, *on a :*

$$(1-2\lambda)e_i^n + \lambda e_{i-1}^n + \lambda e_{i+1}^n \leq \|e_i^n\|_\infty$$

et donc comme le schéma est consistant, d'après l'inégalité (2.3) on trouve :

$$\left|e_i^{n+1}\right| \leq \|e^n\|_\infty + kC(k+h^2).$$

par récurrence, on obtient :

$$\left\|e_i^{n+1}\right\|_\infty \leq \left\|e^0\right\|_\infty + MkC(k+h^2)$$

Ce qui démontre le théorème. ■

2.1.2 Le schéma implicite :

L'approximation en temps par la méthode d'Euler implicite consiste à écrire la première équation de (.2.1) en chaque point x_j et temps t_n, à approcher la dérivée en temps $u_t(x_j, t_n)$ par le quotient différentiel :

$$\frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{k}$$

et la dérivée en espace u_{xx} par le quotient différentiel :

$$\frac{1}{h^2}(u(x_{j+1}, t_{n+1}) + u(x_{j-1}, t_{n+1}) - 2u(x_j, t_{n+1}))$$

On obtient le schéma suivant :

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{k} - \frac{1}{h^2}(u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}) = 0, \ j = 1, ..., N, \ n = 1, ..., M, \\ u_j^0 = u_0(x_j), \quad j = 1, ..., N, \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \quad \forall \ n = 1, ..., M. \end{cases} \tag{2.6}$$

le schéma implicite s'écrit encore :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \lambda(u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1})$$

alors :

$$(1 + 2\lambda)u_j^{n+1} - \lambda u_{j-1}^{n+1} - \lambda u_{j+1}^{n+1} = u_j^n \tag{2.7}$$

La consistance

Proposition 2.1.8 *Le schéma (2.6) est consistant d'ordre* 1 *en temps et d'ordre* 2 *en espace, c'est à dire qu'il existe* $C \in \mathbb{R}_+$ *ne dépendant que de* u *tel que :*

$$\left|R_j^n\right| \leq C(k + h^2)$$

Preuve 5 *on pose* $\bar{u}_j^n = u(x_j, t_n)$, *On a donc par définition de l'erreur de consistance* R_j^n

$$R_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} - \frac{1}{h^2}(u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1})$$

à l'aide d'une développement de Taylor, on trouve :

$$R_j^n = \frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\right)_i^n - \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial x^4}\right)_i^n + ... = O(k + h^2) \underset{h,k \to 0}{\longrightarrow} 0$$

D'où la consistance. ∎

La stabilité

Proposition 2.1.9 *Si* $(u_j^n)_{j=1,...,N}$ *la solution de (2.6), alors :*

$$\max_{j=1,\ldots,N} u_j^{n+1} \leq \max_{j=1,\ldots,N} u_j^n \leq \max_{j=1,\ldots,N} u_j^0 \tag{2.8}$$

Proposition 2.1.10 *De même :*

$$\min_{j=1,\ldots,N} u_j^{n+1} \geq \min_{j=1,\ldots,N} u_j^n \geq \min_{j=1,\ldots,N} u_j^0 \tag{2.9}$$

Le schéma (2.6) est donc L^∞-stable.

Preuve 6 *Prouvons l'estimation (2.8), la preuve de (2.9) est similaire. Soit j_0 tel que $u_{j_0}^{n+1} = \max_{j=1,\ldots,N} u_j^{n+1}$.*

Par définition du schéma d'euler implicite (2.7), on a :

$$u_{j_0}^n = (1+2\lambda)u_{j_0}^{n+1} - \lambda u_{j_0-1}^{n+1} - \lambda u_{j_0+1}^{n+1}$$

On en déduit :

$$u_{j_0}^{n+1} \leq \max_{j=1,\ldots,N} u_j^n$$

ce qui prouve :

$$\max_{j=1,\ldots,N} u_j^{n+1} \leq \max_{j=1,\ldots,N} u_j^n$$

donc le schéma est L^∞-stable. ■

La convergence

Théorème 2.1.11 *Soit e^n l'erreur de discrétisation, définie par*

$$e_j^n = u(x_j, t_n) - u_j^n \text{ pour } j = 1, \ldots, N.$$

Alors $\|e^{n+1}\|_\infty \leq \|e^0\|_\infty + TC(k+h^2)$. Si $\|e^0\|_\infty = 0$, le schéma est donc convergent d'ordre 1 en temps et 2 en espace.

Preuve 7 *En utilisons la définition de l'erreur de consistance, on obtient :* ■

$$(1+2\lambda)e_j^{n+1} - \lambda e_{j-1}^{n+1} - \lambda e_{j+1}^{n+1} = e_j^n + R_j^n$$

et donc :

$$\left\|e^{n+1}\right\|_\infty \leq \|e^n\|_\infty + kC(k+h^2)$$

et par recurrence sur n, on obtient :

$$\left\|e^{n+1}\right\|_\infty \leq \left\|e^0\right\|_\infty + TC(k+h^2)$$

d'où la convergence du schéma implicite.

Chapitre 3

Schéma de différences finies pour le cas $\alpha = 1$ dans (1)

Le but de ce chapitre est de presenter et étudier un schéma de différences finies pour le cas particulier $\alpha = 1$ dans (1). le cas $\alpha = 1$ dans (1) est un problème hyperbolique.

3.1 Problème hyperbolique

On considère le problème unidimensionnel avec une condition initiale u_0, et des conditions aux limites de type Dirichlet homogène suivant :

$$\begin{cases} u_t - u_x = 0, \quad \forall x \in]0,1[, \ \forall t \in]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x), \ \forall x \in]0,1[\\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \ \forall t \in]0,T[\end{cases} \tag{3.1}$$

Pour résoudre numériquement le problème (3.1), on introduit encore $h = \frac{1}{N+1} = \Delta x$ le pas de discrétisation en espace, et $k = \Delta t = \frac{T}{M}$, le pas de discrétisation en temps. On cherche alors à approximer la solution par la méthode des différences finies.

3.1.1 Le schéma explicite

Soit D un domaine de frontière Γ. On choisit un ensemble discret de points D_h (réseau) appartenant à $D+\Gamma$, le réseau D_h sera l'ensemble des points d'intersection des droites :

$t_n = nk, \quad x_i = ih, \quad n = 0, ..., M, \quad i = 0, ..., N+1$

où $k > 0, \quad h > 0$.

Le schéma explicite s'obtient en approchant les dérivées u_t et u_x par les quotients différentiels :

$$\begin{aligned} u_t &\approx \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{k} \\ u_x &\approx \frac{u(x_{i+1}, t_n) - u(x_i, t_n)}{h} \end{aligned}$$

Donc, le schéma est de la forme :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} = 0, \ i = 1, ..., N, \ n = 1, ..., M, \\ u_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 1, ..., N, \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \quad \forall \ n = 1, ..., M. \end{cases} \tag{3.2}$$

Ou encore

$$u_i^{n+1} = (1-r)u_i^n + r u_{i+1}^n$$

avec $r = \frac{k}{h}$.

La construction du schéma aux différences (3.2) est partagée en deux étapes : la consistance du schéma approchant le problème (3.2) pour la solution u, et la vérification de la stabilité de ce schéma.

La consistance

Proposition 3.1.1 *Le schéma (3.2) est consistant d'ordre* 1 *en temps et d'ordre* 1 *en espace, c'est à dire qu'il existe* $C \in \mathbb{R}_+$ *ne dépendant que de* u *tel que :*

$$|R_i^n| \leq C(k+h)$$

Preuve 8 *Soit* $\bar{u}_i^n = u(x_i, t_n)$ *la valeur exacte de la solution en* x_i *et* t_n*.D'après la définition de l'erreur de consistance* R_i^n*, on a :*

$$R_i^n = \frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{k} - \frac{\bar{u}_{i+1}^n - \bar{u}_i^n}{h}$$

Selon la formule de Taylor on a

$$\begin{cases} \frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{k} = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\right)_i^n + \frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\right)_i^n + \ldots \\ \frac{\bar{u}_{i+1}^n - \bar{u}_i^n}{h} = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)_i^h + \frac{h}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\right)_i^h + \ldots \end{cases}$$

Donc l'erreur s'écrit

$$R_i^n = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)_i^n + \frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\right)_i^n - \frac{h}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\right)_i^n + \ldots$$

ou encore

$$R_i^n = \frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\right)_i^n - \frac{h}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\right)_i^n$$

alors

$$\begin{aligned} |R_i^n| &\leq \left(\sup\left|\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\right| \cdot \frac{k}{2} + \sup\left|\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\right| \cdot \frac{h}{2}\right) \\ &= C(k+h) \end{aligned}$$

Ainsi, le schéma explicie considéré (3.2) approche le problème (3.1) est consistant. ■

Il nous reste à rappeler et à illustrer le concept de stabilité.

La stabilité

Montons la stabilité du schéma (3.2) pour $r \leq 1$.

Preuve 9 *Le schéma s'écrit sous la forme*

$$u_i^{n+1} = (1-r)u_i^n + ru_{i+1}^n$$

puisque $r \leq 1$, *on a* $1 - r \geq 0$, *alors*

$$\begin{aligned} \left|u_i^{n+1}\right| &\leq (1-r)\max_{i=1,\ldots,N}|u_i^n| + r\max_{i=1,\ldots,N}|u_i^n| \\ &= [(1-r)+r]\max_{i=1,\ldots,N}|u_i^n| \end{aligned}$$

i.e :

$$\left|u_i^{n+1}\right| \leq \max_{i=1,\ldots,N}|u_i^n|$$

En passant au maximum, en déduit :

$$\max_{i=1,\ldots,N}\left|u_i^{n+1}\right| \leq \max_{i=1,\ldots,N}|u_i^n|$$

De même

$$\begin{cases} \max\limits_{i=1,\ldots,N}|u_i^n| \leq \max\limits_{i=1,\ldots,N}\left|u_i^{n-1}\right| \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \max\limits_{i=1,\ldots,N}|u_i^1| \leq \max\limits_{i=1,\ldots,N}|u_i^0| \end{cases}$$

Une réduction des termes donnent

$$\max_{i=1,\ldots,N}\left|u_i^{n+1}\right| \leq \max_{i=1,\ldots,N}\left|u_i^0\right|$$

D'où le schéma est L^∞*-stable au sens au :*

$$\max_{i=1,\ldots,N}|u_i^n| \leq \|u_0\|_\infty$$

■

Remarque 3.1.2 *D'près le théorème de convergence, si le schéma aux différences est stable et consistant, alors il est convergent, et l'ordre en $h+k$ de la convergence coincide avec l'ordre de consistance.*

Remarque 3.1.3 *Pour $r>1$, on peut démontrer qu'il y a pas convergence, voir Godounov ([2], page 192-193).*

3.1.2 Le schéma implicite

le schéma implicite pour le problème (3.1) est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{k} - \frac{u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}}{h} = 0, \ j=1,...,N, \ n=1,...,M, \\ u_j^0 = u_0(x_j), \quad j=1,...,N, \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \quad \forall\ n=1,...,M. \end{cases} \tag{3.3}$$

ou encore :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + r(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1})$$

Alors

$$(1-r)u_j^{n+1} + ru_{j+1}^{n+1} = u_j^n$$

La consistance

On va montrer la consistance du schéma (3.1).
on pose $\bar{u}_j^n = u(x_j, t_n)$, On a donc par définition de l'erreur de consistance R_j^n

$$R_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} - \frac{1}{h}(u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1})$$

Selon la formule de Taylor on a

$$\begin{cases} \frac{\bar{u}_i^{n+1}-\bar{u}_i^n}{k} = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\right)_j^n + \frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\right)_j^n + ... \\ \frac{\bar{u}_{i+1}^{n+1}-\bar{u}_i^{n+1}}{h} = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)_j^n + \frac{h}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\right)_j^n + ... \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} R_i^n &= \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)_j^n + \frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\right)_j^n - \frac{h}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\right)_j^n + .. \\ &= \frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\right)_j^n - \frac{h}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\right)_j^n + .. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |R_i^n| &\leq \left(\sup\left|\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\right| . \frac{k}{2} + \sup\left|\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\right| . \frac{h}{2}\right) \\ &= C(k+h) \end{aligned}$$

D'où la consistance du schéma est d'ordre 1 en espace et 1 en temps.

La stabilité

Le schéma s'écrit sous la forme

$$(1-r)u_j^{n+1} + ru_{j+1}^{n+1} = u_j^n$$

Soit $u_{j_0}^{n+1} = \max\limits_{j=1,\ldots,N} u_j^{n+1}$, alors

$$(1-r)u_{j_0}^{n+1} + ru_{j_0+1}^{n+1} = u_{j_0}^n$$

Ce qui implique que

$$u_{j_0}^{n+1} \leq u_{j_0}^n$$

i.e :

$$\max_{j=1,\ldots,N} u_j^{n+1} \leq \max_{j=1,\ldots,N} u_j^n$$

Donc le schéma implicite est inconditionellement stable.

D'aprèsle théorème de convergence, on a la convergence du schéma implicite (3.3), et l'ordre de convergence est le mème ordre de consistance.

Chapitre 4

Equations différentielles fractionnaires

4.1 Existence de la solution

Avant d'étudier l'approximation numérique, nous allons montrer l'existence et l'unicité de la solution exacte d'une équation différentielle fractionnaire.

Soit la forme générale de l'équation fractionnaire de réaction-diffusion nonlinéaire

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= D\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} + \tilde{f}(u(x,t)), \\ u(x,0) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{4.1}$$

où $\tilde{f}$:$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $1 < \alpha < 2$. Le premier terme à droite est le terme de diffusion, et le deuxième terme est le terme de réaction.

En écrit l'équation (4.1) sous la forme d'une équation différentielle ordinnaire en t dans un espace de Banach X.

Soit X un espace de Banach, associe de la norme $\|v\|$. On considère l'équation

$$\dot{u} = Au(t) + f(u(t)), \qquad t > 0,\ u(0) = u_0$$

avec $u : [0, \infty) \to X$ et $f : X \to X$.

Ici A est le générateur d'un C^0-semi-groupe $\{T(t)\}_{\geq 0}$ dans X.

Comme $T(t)$ est borné, alors il existe un nombre réel $M > 0$ dépend de $T > 0$, tel que

$$\|T(t)u\| \leq M \|u\| \quad \text{pour tout } u \in X.$$

On dit que le semi-groupe $\{T(t)\}_{\geq 0}$ est engendré par A.

Definition 4.1.1 *On dit que $u : [0, \delta] \to X$ est une solution classique locale (forte) de l'équation (4.1), si elle est continue dans $[0, \delta]$, continuement différentiable dans $(0, \delta)$, $u(t) \in D(A)$ pour $t \in (0, \delta)$ et u vérifiée (4.1) dans $(0, \delta)$.*

Si δ est choisi arbitrairement grand, alors u est une solution classique globalale de (4.1).

Definition 4.1.2 *Une fonction $u : [0, \delta] \to X$ est une solution généralisée locale de (4.1), si u est continue et vérifiée l'équation integrale correspondante*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(u(s))ds \qquad \textit{pour } 0 \leq t < \delta. \tag{4.2}$$

Si δ est choisi arbitrairement grand, alors u est une solution généralisée globale de (4.1).

L'équation de réaction-diffusion (4.1) a deux cas particuliers impotants :

L'équation de réaction

$$\dot{u} = f(u(t)), \qquad t > 0,\ u(0) = u_0 \tag{4.3}$$

et l'équation de diffusion

$$\dot{u} = Au(t), \qquad t > 0,\ u(0) = u_0 \tag{4.4}$$

Definition 4.1.3 *On dit que $f : X \to X$ est globalement lipschitzienne, si pour un certain $k > 0$, on a*

$$\|f(u) - f(v)\| \leq k \|u - v\| \text{ pour tout } u, v \in X,$$

Definition 4.1.4 *et elle est localement lipschitzienne, si $\|u\|$, $\|v\| \leq M$ avec $k = k(M)$ pour $M > 0$.*

Théorème 4.1.5 *Supposons que X est un espace de Banach, et $f : X \to X$ est globalement lipschitzienne dans la norme de X. Alors l'équation de réaction (4.3) admet une unique solution globale forte : $u(t) = S(t)u_0$, pour une condition initiale $u_0 \in X$. Cette solution engendrée par f est donnée par :*

$$u(t) = S(t)u_0 = u_0 + \int_0^t f(u(s))ds \tag{4.5}$$

Si A est le générateur d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{\geq 0}$ on X, alors l'équation de diffusion (4.4) admet une unique solution globale généralisée $u(t) = T(t)u_0$, pour une condition initiale $u_0 \in X$, et si $u_0 \in D(A)$, alors elle est aussi l'unique solution globale forte.

Donc pour $u_0 \in X$, l'équation de réaction-diffusion (4.1) admet l'unique solution généralisée globale :

$$u(t) = W(t)u_0 = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(u(s))ds \tag{4.6}$$

Si $u_0 \in D(A)$ et $f : X \to X$ est continuement differentiable, alors (4.6) est l'unique solution globale forte de l'équation de réaction-diffusion (4.1).

Preuve 10 *Si $f : X \to X$ est globalement lipschitzienne, alors pour tout $u_0 \in X$, il* *existe une solution généralisée globale unique* $u(t) = W(t)u_0$ *de (4.1) avec*

$$\|W(t)u_0 - W(t)v_0\| \leq M_T \|u_0 - v_0\|, \quad t \in [0, T].$$

Parceque l'équation de réaction (4.3) est un cas particulier de (4.1) avec $A = 0$, *il resulte que (4.3) admet une solution généralisée unique donnée par (4.2) avec* $T(t)u_0 = u_0$.

Cette solution est aussi solution forte, comme, si u *et* f *sont continues, alors* $t \to f(u(t))$ *est continue, et* $t \to \int_0^t f(u(s))ds$ *est différentiable, avec*

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f(u(s))ds = f(u(t))$$

alors $t \to u(t)$ *est différentiable à partir de (4.5) et le facteur* $\dot{u} = f(u(t))$, *donc* u *est une solution forte.*

Comme l'équation de diffusion (4.4) est un cas particulier de (4.1) avec $f(u) = 0$, *il s'ensuit que (4.3) admet une unique solution généralisée* $u(t) = T(t)u_0$, *et elle est une solution forte si* $u_0 \in D(A)$, *et* $f : X \to X$ *est continuement differentiable.* ■

4.2 L'approximation numérique des équations différentielles fractionnaires avec un terme source linéaire

Dans cette section, nous allons discuter la solution numérique des équations différentielles fractionnaires avec un terme source lineaire (pour la simplicité en prend $\tilde{f}(u(x,t)) = S(x,t)$), l'équation est donnée par la forme :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} + S(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega \times (0, T\,] \tag{4.7}$$

avec $\Omega = (0,1)$; S est le terme source, T est un nombre réel positif. Ici on considère le cas $1 < \alpha < 2$ où α est l'ordre de fraction.

Les conditions aux limites considérées ici sont de type Dirichlet homogène :

$$u(0,t) = 0, \;\; u(1,t) = 0 \qquad t \in (0, T\,] \tag{4.8}$$

Et la condition initiale est donées par :

$$u(x,0) = \; u_0(x), \qquad x \in \Omega$$

La dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α est définie par :

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dx^2} \int\limits_0^x \frac{u(\zeta)}{(x-\zeta)^{\alpha-1}} d\zeta \tag{4.9}$$

où n est un entier tel que $n - 1 < \alpha \leq n$ et $\Gamma(\alpha)$ est la fonction de Gamma.

Pour obtenir l'approximation numérique de l'équation (4.7) par la méthode des différences finies, on définie la formule de Grünwald :

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{N} g_k u(x-(k-1)h, t), \tag{4.10}$$

avec

$$g_k = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+\alpha)} = (-1)^k \binom{\alpha}{k} = (-1)^k \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}$$

La définition analytique donnée par (4.9) est utilisée dans la formulation de l'équation différentielle fractionnaire, mais la définition de Grünwald donnée par (4.10) est utilisée pour la discrétisation de l'équation différentielle fractionnaire pour obtenir une solution numérique.

4.2.1 Le schéma explicite

On définit $t_n = n\Delta t$ avec $0 \leq t_n \leq T$. Soit $h = \Delta x$ où $k = \Delta t = \frac{1}{N}$ et $x_i = i\Delta x$ pour $i = 0, 1, 2, ...N$.

On approxime $u(x_i, t_n)$ par u_i^n , et $S(x_i, t_n)$ par S_i^n.

Le schéma explicite pour l'équation (4.7) est donné par :

$$\frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{k} = \frac{\partial^\alpha u(x_i, t_n)}{\partial x^\alpha} + S(x_i, t_n) + O(k) \tag{4.11}$$

avec $1 < \alpha < 2$.

la formule de Grünwald (4.10) donne l'estimation de Grünwald :

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{N} g_k u(x - (k-1)h, t) + O(h).$$

Donc, le schéma (4.11) devient :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{i+1} g_k u_{i-k+1}^n + S_i^n, \qquad i = 1, 2, ...k - 1 \tag{4.12}$$

alors

$$u_i^{n+1} = \beta g_0 u_{i+1}^n + (1 + \beta g_1) u_i^n + \beta \sum_{k=2}^{i+1} g_k u_{i-k+1}^n + k S_i^n \tag{4.13}$$

avec $\beta = k/h^\alpha$, et

$$\begin{cases} u_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 1, ..., N, \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \quad \forall\ n = 1, ..., M. \end{cases}$$

maintenant, nous allons montrer que ce schéma est conditionnellement stable.

Proposition 4.2.1 *Le schéma explicite donné par (4.13) est stable si $k/h^\alpha \leq 1/\alpha$.*

Preuve 11 *L'équation (4.13) avec les conditions de Dirichlet (4.8) forme un systeme* *lineaire d'équations.Ce systeme est sous la forme :*

$$U^{n+1} = A\ U^n + k\ S^n$$

tels que :

$$\begin{aligned} U^n &= [u_0^n,\ u_1^n,\ u_2^n, ...,\ u_N^n]^T \\ S^n &= [0,\ S_1^n,\ S_2^n, ...,\ S_{N-1}^n,\ 0]^T. \end{aligned}$$

Et A est une matrice d'ordre $(N+1) \times (N+1)$.

On a :

$$\begin{cases} u_1^{n+1} = (1+\beta g_1)u_1^n + \beta g_0 u_2^n + k\ S_1^n \\ u_2^{n+1} = \beta g_2 u_1^n + (1+\beta g_1)u_2^n + \beta g_0 u_3^n + k\ S_2^n \\ u_3^{n+1} = \beta g_3 u_1^n + \beta g_2 u_2^n + (1+\beta g_1)u_3^n + \beta g_0 u_4^n + k\ S_2^n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{k-1}^{n+1} = \beta g_{k-1} u_1^n + ... + (1+\beta g_1)u_{k-1}^n + k\ S_{k-1}^n \end{cases}$$

Le système $U^{n+1} = A\ U^n + k\ S^n$ devient

$$\begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{k-1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\beta g_1 & \beta g_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta g_2 & 1+\beta g_1 & \beta g_0 & 0 & \dots & \dots \\ \beta g_3 & \beta g_2 & 1+\beta g_1 & \beta g_0 & \ddots & \dots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \beta g_0 \\ & & & & \beta g_2 & 1+\beta g_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{k-1}^n \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} S_1^{n+1} \\ S_2^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ S_{k-1}^{n+1} \end{pmatrix}$$

Donc les coefficients $a_{i,j}$ sont donnés par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & ,\ si\ j \geq i+2 \\ 1+\beta\ g_1 & ,\ si\ j = i \\ g_{i-j+1}\beta & sinon \end{cases}$$

Avec $a_{0,0} = 1, a_{0,j} = 0$ *pour* $j = 1, 2, ..., N$, $a_{N,N} = 1$ *et* $a_{N,j} = 0$ *pour* $j = 0, ..., N-1$.

Notons que $g_1 = -\alpha$ *et pour* $1 \leq \alpha \leq 2$ *et* $i \neq j$ *on a* $g_i \geq 0$. *et on a aussi* $-g_1 \geq \sum_{k=1,k\neq 1}^{k=N} g_i$.

D'après le théorème de Gerschgorin, l'ensemble des valeurs propres de la matrice A *est inclu dans la reunion des disques de Greschgorin de centre* $a_{i,i}$ *et de rayon* $r_i = \sum_{k=0,k\neq 1}^{N} a_{i,k}$.

On a ici $a_{i,i} = 1 + g_1\beta = 1 - \alpha\beta$ *et*

$$r_i = \sum_{k=0,k\neq 1}^{N} a_{i,k} = \sum_{k=0,k\neq 1}^{i+1} a_{i,k} = \beta \sum_{k=0,k\neq 1}^{i+1} g_i \leq \alpha\beta$$

c-à-dire que les valeurs propres λ_i *de* A *vérifiant :*

$$|\lambda_i - a_{i,i}| \leq r_i \Longrightarrow a_{i,i} - r_i \leq \lambda_i \leq a_{i,i} + r_i$$

et pour que le schéma soit stable, il faut que le rayon spectral de A *défini par* $\rho(A) = max\{|\lambda_i(A)|; i \in \{1, ..., n\}\}$,*vérifie*

$$\rho(A) \leq 1$$

On a d'une coté $a_{i,i} + r_i \leq 1$, *et de l'autre coté* $a_{i,i} - r_i \geq 1 - 2\alpha\beta$.

Alors pour que le rayon spectral de la matrice A *soit le maximum valeur propre, il suffit de prendre* $1 - 2\alpha\beta \geq -1$.

D'où la condition

$$\beta = \frac{k}{h^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha}$$

Alors, de cette condition on déduit que le rayon spectral de la matrice A *est majoré par* 1,*ce qui implique que l'erreur numérique ne grandit pas, et par conséquant le schéma explicite est conditionnelement stable.* ■

Proposition 4.2.2 *le schéma explicite défini par (4.13) est consistant d'ordre* $O(k)+O(h^{[\alpha]})$*, où* $[\alpha]$ *est la partie entière de* α.

Preuve 12 *D'après la définition de l'erreur de consistance, on a*

$$R_i^n = \frac{u(x_i,t_{n+1})-u(x_i,t_n)}{k} - \frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{N} g_k u(x_{i-k+1},t_n) - S(x_i,t_n)$$

Selon une développement de Taylor et la formule de Grünwald, on trouve

$$u_t(x_i,t_n)+O(k)-\frac{\partial^\alpha u(x_i,t_n)}{\partial x^\alpha}+O(h)-S(x_i,t_n)$$

En utilisant (4.7), on obtient

$$\begin{aligned} S(x_i,t_n)-S(x_i,t_n)+O(k)+O(h) &= O(k)+O(h) \\ &= O(k+h). \end{aligned}$$

Donc le schéma explicite est consistant d'ordre $O(k+h)$. ■

Alors d'après le théorème de convergence, le schéma numérique (4.13) est convergent.

4.2.2 Le schéma implicite

Miantenant, on étudié l'approximation numéreique par le schéma implicite.

On utilise l'éstimation de Grünwald, on obtient le schéma numérique de l'équation (4.7) sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{k} = \frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{i+1} g_k u_{i-k+1}^{n+1} + S_i^{n+1} \\ u_i^0 = u_0(x_i), \quad i=1,...,N, \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \quad \forall\ n=1,...,M. \end{cases} \tag{4.14}$$

Avec $t_n = n\Delta t, n=1,...,M$ où $0 \le t_n \le T$. Et $h=\Delta x$ et $k=\Delta t$ où $\Delta x = \frac{1}{N}$ et $x_i = i\Delta x$ pour $i=0,1,2,...N$.

$u(x_i,t_n)$ est approximé par u_i^n , et $S(x_i,t_n)$ par S_i^n.

Proposition 4.2.3 *Le schéma implicite définie par (4.14) qui approxime l'équation différentielle fractionnaire (4.7) avec $1 < \alpha < 2$ est inconditionnellement stable.*

Preuve 13 *Le système des équations définie par (4.14) avec les conditions de Dirichlet forme un systeme lineaire d'equations de la forme*

$$AU^{n+1} = U^n + k\ S^n$$

tels que :

$$\begin{aligned} U^n &= [u_0^n,\ u_1^n,\ u_2^n, ...,\ u_N^n]^T \\ S^n &= [0,\ S_1^n,\ S_2^n, ...,\ S_{N-1}^n,\ 0]^T \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{cases} u_1^{n+1} - \beta(g_0 u_2^{n+1} + g_1 u_1^{n+1} + g_2 u_2^{n+1}) = u_1^n + kS_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} - \beta(g_0 u_3^{n+1} + g_1 u_2^{n+1} + g_2 u_1^{n+1} + g_3 u_0^{n+1}) = u_2^n + kS_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} - \beta(g_0 u_4^{n+1} + g_1 u_3^{n+1} + g_2 u_2^{n+1} + g_3 u_1^{n+1} + g_4 u_0^{n+1}) = u_3^n + kS_3^{n+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{k-1}^{n+1} - \beta(g_0 u_k^{n+1} + g_1 u_{k-1}^{n+1} + g_2 u_{k-2}^{n+1} + ... + g_k u_0^{n+1}) = u_{k-1}^n + kS_{k-1}^{n+1} \end{cases}$$

où $\beta = \frac{k}{h}$.

Alors le système devient

$$\begin{pmatrix} 1-\beta g_1 & -\beta g_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\beta g_2 & 1-\beta g_1 & -\beta g_0 & 0 & \dots & \dots \\ -\beta g_3 & -\beta g_2 & 1-\beta g_1 & -\beta g_0 & \ddots & \dots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & -\beta g_0 \\ & & & & -\beta g_2 & 1-\beta g_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{k-1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{k-1}^n \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} S_1^{n+1} \\ S_2^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ S_{k-1}^{n+1} \end{pmatrix}$$

Donc les coefficients $a_{i,j}$ de la matrice A sont donnés par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1-\beta g_1 & si\ j=i \\ 0 & si\ j \geq i+2 \\ -\beta g_{i-j+1} & sinon \end{cases}$$

Avec $a_{0,0} = 1, a_{0,j} = 0$ pour $j = 1,2,...,N$, $a_{N,N} = 1$ et $a_{N,j} = 0$ pour $j = 0,...,N-1$.

D'après le théorème de Gerschgorin, l'ensemble des valeurs propres de la matrice A est inclu dans la reunion des disques de centre $a_{i,i} = 1-\beta g_1 = 1+\alpha\beta$, et de rayon

$$r_i = \sum_{k=0,k\neq 1}^{N} a_{i,k} = \sum_{k=0,k\neq 1}^{i+1} a_{i,k} = -\beta \sum_{k=0,k\neq 1}^{i+1} g_i \geq -\alpha\beta$$

Donc $a_{i,i} + r_i \geq 1$,et $a_{i,i} - r_i \leq 1+2\alpha\beta$,

Et comme $1+2\alpha\beta \geq 0$, alors $a_{i,i} - r_i \geq -1$ est toujours vrai, et les valeurs propres de A sont tous supèrieure à 1.

Alors le rayon spectrale de la matrice inverse A^{-1} est inferieure ou egale à 1, et par consiquant le schéma implicite est inconditionellement stable. ■

De la mème façon que nous avons vu dans le schéma explicite, on montre que le schéma implicite est consistant, et donc convergent d'après le théorème de convergence : stabilité+consistance⇒convergence.

Conclusion et perspectives

Nous avons considéré une équation differentielle fractionnaire d'ordre α, dépendant du temps. Pour la perfection et afin de comprendre les idées fondamentales de l'approximation, nous avons étudié la première fois quelques cas simples des schemas différences finis rapprochant le problème à l'étude quand $\alpha = 1$, cas hyperbolique, et $\alpha = 2$, cas parabolique. Nous nous sommes déplacés ensuite au cas quand $1 < \alpha < 2$. Nous avons présenté des schémas explicite simple (et quelques fois implicites) et nous avons fourni sa convergence. La convergence de ce schéma explicite est basée sur le théorème bien connu qui déclare que la consistance et la stabilité impliquent la convergence des schémas de différences finis.

Ce travail est un initiation à un travail qui vise à étudier les schémas disponibles (en différences finies et éléments finis) et puis à se déplacer au schéma finis volumes finis rapprochant des équations differentielles fractionnaires dépendant du temps, qui est nouveau et n'a pas été traité avant.

Conclusion and perspectives

We considered a time dependent fractional partial diferential equation of order α. For the sake of completeness and in order to understand the basic ideas of the approximation, we first studied some simple cases of finite diference schemes approximating the problem under consideration when $\alpha = 1$, hyperbolic case, and $\alpha = 2$, parabolic case. We moved after to the case when $1 < \alpha < 2$.

We presented a simple explicit scheme and we provided its convergence. The convergence of this explicit scheme is based on the well known theorem which states that consistency and stability implies convergence of the finite diference schemes.

This work is initiation to a long work which aims to study the availables schemes (in finite diferences and finite elements methods) and then to move to present finite volume schemes approximating time dependent fractional partial diferential equations which is new and has not been treated before.

Bibliographie

[1] Baeumer, Boris ; Kov acs, Mih aly ; Meerschaert, Mark M. : Numerical solutions for fractional reaction-diffusion equations. Comput. Math. Appl., 55, No. 10, 2212-2226 (2008).

[2] Brezis, H. : Analyse Fonctionnelle : Theorie et Applications", Dunod, Paris, 1999.

[3] Choi, Chung ; Lee : Numerical solution for space fractional dispersion equations with nonlinear source terms. Bull. Korean Math. Soc., 47, No. 4, 1256-1234 (2010).

[4] Godounov, S, et Riabenki : Schémas aux Différences. Traduction française Edition MIR. Moscou, 1977.

[5] Erdelyi, A., Magnus, M.M., Integral Transforms and Representations of Functions in Complex Domain, Nauka, Moskow, 1966.

[6] Eymard, R., Gallouet, T. and Herbin, R. : Finite Volume Methods. Handbook of Numerical Analysis. P. G. Ciarlet and J. L. Lions (eds.), VII , 723-1020, 2000.

[7] Meerschaert, Tadjeran : Finite diference approximations for franctional advection dispersion flow equations. J. Compt. Appl. Math. , 172, No. 1, 65-77 (2004).

[8] Meerschaert, Tadjeran : Finite diference approximations for two sided space franctional partial diferential equations. Appl. Numer. Math., 56, No. 1, 80-90 (2006).

[9] Meerschaert, Scheftler, Tadjeran : Finite diference methods for two dimensional franctional dispersion equations. J. Comput. Phys., 211, No. 1, 249-261 (2006).

[10] Tadjeran, C, Meerschaert, M.M, Scheffter, H.P : A second order accurate numerical approximation for fractional diffusion equation. J. Comput. Phys, 213, N.1, 205-213, 2006.

[11] Herbin, Rahale : Analyse Némurique, Cours de Master 1 Polycopiés en ligne. http ://www.cmi.univ-mrs.fr