Toulouse, le 8 février 2016

Rapport sur le mémoire présenté par Abdallah Bradji pour l'obtention du diplôme d'Habilitation à Diriger des Recherches de l'Université de Marseille

Le dossier d'habilitation d'Abdallah Bradji présente un très bel ensemble de résultats portant sur l'analyse numérique de schémas volumes finis ou éléments finis. Il se compose d'une présentation en 18 pages du dossier d'Abdallah Bradji suivie de 9 articles dans des revues internationales et d'un compte rendu de conférence.

Le dossier de présentation comporte : une synthèse des activités d'Abdallah Bradji, un résumé de ses travaux ainsi qu'une liste détaillée de ses publications. Abdallah Bradji est Professeur à l'Université d'Annaba en Algérie depuis janvier 2015. Il était auparavant Maître de conférences dans cette même université depuis 2002. Il a soutenu une Habilitation à Diriger des Recherches Algérienne à Annaba en décembre 2009 ainsi qu'une thèse de doctorat en mathématiques appliquées de l'Université de Marseille en novembre 2005 sous la direction de Thierry Gallouët.

Abdallah Bradji a publié pas moins de 14 articles dans des revues internationales de tout premier plan (Applied Mathematics and Computation, Numerical Functional Analysis and Optimization, JMMA, Numerical Methods for Partial Differential Equations...), 2 notes courtes et 15 proceedings de conférences.

De mon point de vue, les travaux présentés dans le dossier d'habilitation d'Abdallah Bradji peuvent se décomposer en cinq parties :

1. Le développement de nouveaux schémas volumes finis d'ordre élevés et leur analyse numérique en une dimension d'espace. Cette partie est détaillée dans les chapitres 3 et 4 qui sont deux articles publiés dans des revues internationales.

2. L'analyse numérique de schémas classiques volumes finis avec établissement d'estimations d'erreur sur des maillages non conformes en espace. Cette partie concerne les chapitres 5 à 8 qui sont quatre articles publiés dans des revues internationales dont l'un est écrit en collaboration avec Jürgen Furhrmann.

3. L'obtention de nouvelles estimations d'erreur sur les dérivées en temps et en espace de la solution approchée pour des schémas éléments finis d'ordre 2 en temps et de degré k en espace. Cette partie est décrite dans deux articles en collaboration avec Jürgen Furhrmann, publiés dans des revues internationales et donnés dans les chapitres 9 et 10.

4. L'analyse de convergence de schémas éléments finis ou volumes finis pour un système de deux équations elliptiques non linéaires couplées dont l'une est à second membre L^1. Ce travail qui a fait l'objet d'une publication en collaboration avec Raphaèle Herbin est donné dans le chapitre 11.

5. L'analyse de l'ordre de convergence des solutions approchées données par le logiciel de modélisation COMSOL. Cette dernière partie fait l'objet du chapitre 12 et a été publiée en collaboration avec E. Holzbecher dans les proceedings d'une conférence COMSOL à Grenoble en 2007.

Je vais maintenant détailler les résultats qui m'ont le plus marquée dans chacune des parties ci-dessus. Plutôt que de suivre l'ordre des chapitres, je vais suivre l'ordre chronologique en partant donc de la fin.

Dans le chapitre 12, Abdallah Bradji s'intéresse à l'ordre de convergence obtenu dans des simulations effectuées avec le logiciel COMSOL pour des problèmes stationnaires de type elliptique. Abdallah Bradji montre que lorsque les données du problèmes sont régulières et que les conditions aux limites sont simples (Dirichlet homogène), l'ordre de convergence théorique des méthodes éléments finis, utilisées dans COMSOL, est atteint.

Il montre de plus que la régularité des données est nécessaire pour atteindre cet ordre théorique. En effet, lorsque le terme source est une Dirac, l'ordre tombe de 3 à 1. Enfin, l'adaptation du maillage n'a aucune influence sur la qualité des résultats si les conditions aux limites sont simples. En revanche, elle améliore significativement les résultats pour des conditions aux limites mixtes de type Dirichlet-Neumann, ceci parce que l'adaptation du maillage est utile dans les zones de transition entre les conditions de Dirichlet et Neumann.

Abdallah Bradji termine son analyse des résultats numériques donnés par le logiciel COMSOL avec un cas test pour le système de Navier Stokes incompressible stationnaire. Celui-ci permet de montrer que les résultats dépendent non seulement de la norme choisie mais aussi des variables considérées, ici la pression ou la vitesse.

Le chapitre 11 traite d'un système de deux équations elliptiques non linéaires couplées. Le problème est issu de la modélisation de l'effet Joule dans un milieu conducteur où les inconnues sont le potentiel électrique et la température. La quantité de chaleur créée par le passage du courant dans le conducteur étant proportionnelle au carré du gradient du potentiel qui est L^2, le terme source de l'équation stationnaire de la chaleur est seulement L^1. Ainsi, on sort du cadre variationnel classique et il faut faire appel à la théorie des équations elliptiques avec second membre mesure ou L^1.

Les auteurs considèrent alors deux types de discrétisation, l'une donnée par des éléments finis de degré 1 sur des triangulations régulières. L'autre discrétisation consiste en un schéma volumes finis sur des maillages conformes (incluant notamment les maillages de Voronoï). Dans les deux cas, l'existence et l'unicité d'une solution approchée sont établies. Enfin, la convergence de la solution approchée vers un couple de fonctions, solution du problème couplé est montrée.

L'originalité des travaux présentés dans les chapitres 9 et 10, réside dans la nature des estimations d'erreur qui sont obtenues. En effet, Abdallah Bradji considère l'équation de la chaleur (chapitre 9) et l'équation des ondes (chapitre 10) qu'il discrétise avec des schémas éléments finis de degré k sur des triangulations régulières en dimension 1, 2 ou 3. Les schémas en temps sont d'ordre au moins 2 avec le schéma de Crank Nicolson pour l'équation de la chaleur (moyenne centrée implicite-explicite pour le terme de diffusion) et le schéma de Newmark pour l'équation des ondes (moyenne pondérée par un paramètre γ des trois temps successifs : $n+1$ implicite, n explicite et $n-1$ sous-explicite). Abdallah Bradji montre alors des estimations sur les dérivées en espace de l'erreur mais aussi la dérivée discrète en temps de celle-ci. L'ordre attendu de $k+1$ en espace et 2 en temps est établi grace à des estimations très fines d'analyse numérique des schémas éléments finis.

Dans les chapitres 5 à 8, Abdallah Bradji s'intéresse à des schémas volumes finis sur des maillages non conformes. Un maillage est non-conforme si certains des sommets du maillage se trouvent au milieu d'arêtes ou de faces. Cela permet notamment d'utiliser des mailles non nécessairement convexes. Abdallah Bradji s'appuie sur un article de R. Eymard, T. Gallouët et R. Herbin (SIAM J. Numer. Anal., 2010). Dans cet article, les auteurs propose un schéma pour discrétiser des opérateurs elliptiques hétérogènes et anisotropes sur des maillages non conformes. Les auteurs montrent alors la convergence du schéma ainsi que des estimations d'erreur. Abdallah Bradji étend ces résultats à plusieurs problèmes. Tout d'abord au cas des équations de Shrödinger, de la chaleur et des ondes traitées avec un schéma implicite en temps (chapitres 5, 6 et 8). Pour cela, il établit "classiquement" des estimations d'erreur sur la norme L^∞ en temps H_0^1 en espace, mais aussi une estimation d'erreur sur la dérivée discrète en temps de la solution approchée ce qui est beaucoup moins classique. Il montre de plus, sur des cas test unidimensionnels, que l'ordre théorique donné par l'analyse, est optimal puisqu'il est retrouvé numériquement.

Il généralise ensuite ces résultats aux équations de la chaleur et des ondes en remplaçant le schéma implicite en temps par les schémas de Crank-Nicolson pour l'équation de la chaleur et de Newmark pour l'équation des ondes comme dans les chapitres 9 et 10. Ces deux derniers résultats font l'objet de deux articles dont l'un est présenté dans le chapitre 7.

Je termine par les chapitres 3 et 4 qui présentent une idée très originale pour construire des schémas d'ordres élevés avec un coût de l'ordre de celui d'un schéma d'ordre 1.

L'idée consiste à écrire en chaque point du maillage, un développement de Taylor de la solution exacte dans l'équation considérée. Dans ce développement, les termes d'ordre 0 concernent l'équation initiale, les termes d'ordres supérieurs font intervenir des dérivées de la solution exacte. Ces dérivées de la solution exacte sont solutions d'une équation du même type que la solution elle même, pour l'établir, il suffit de dériver l'équation. Pour obtenir une approximation, il suffit donc d'appliquer le schéma d'ordre 1 sur l'équation initiale et sur les équations des dérivées de la solution. Le coût est alors celui du schéma d'ordre 1 multiplié par le nombre de fois où il faut l'appliquer pour déterminer les approximations de la solution exacte et de ses dérivées. Dans l'un des exemples détaillés qui concerne l'équation de la chaleur, il faut résoudre quatre systèmes linéaires dont la matrice est celle du schéma implicite d'ordre 1. Abdallah Bradji établit un schéma d'ordre 2 en temps et en space pour les équations de la chaleur (chapitre 3) et des ondes (chapitre 4) en dimension une d'espace. L'analyse numérique de ceux-ci permet à Abdallah Bradji de montrer que l'ordre est bien 2 en espace et en temps. Des simulations numériques valident l'ordre théorique. Il est important de noter qu'étant donné que les matrices utilisées dans la résolution du schéma sont identiques à celle utilisée pour le schéma d'ordre 1 mais plusieurs fois, on s'attend à un coût très compétitif. Il serait intéressant de réaliser des comparaisons de coût calcul avec le schéma d'ordre 1 mais aussi avec les schémas d'ordre élevés classiques comme les méthodes WENO ou Galerkin Discontinu.

En conclusion, Abdallah Bradji présente un dossier d'habilitation dans lequel il montre une grande maîtrise des techniques d'analyse numérique pour deux classes de schémas : éléments finis et volumes finis. Pour chaque problème considéré, il établit des estimations d'erreurs précises permettant de déterminer l'ordre en temps et en espace du schéma. Il a de plus, développé une technique originale permettant de construire des schémas d'ordres élevés pour des équations hyperboliques d'ordre 2 et des équations paraboliques qu'il a analysés et implémentés.

Tous ces résultats montrent clairement la capacité et le talent d'Abdallah Bradji à mener des recherches en mathématiques appliquées de grande qualité. Pour toutes ces raisons, je donne un avis très favorable à la soutenance de l'habilitation à diriger des recherches d'Abdallah Bradji.

Fait à Toulouse le 8 février 2016
Marie-Hélène Vignal