# Programme SEM(Y) destinés aux étudiants de 3ème Licence LMD: Initiation à la méthode de volumes finis

Author: Dr. Bradji, Abdallah

Contact: abradji@yahoo.fr

## Motivation

(This Motivation has been taken from a booklet of Professor R. Herbin)

### L'analyse numérique des équations differentielles et aux dérivées partielles

Pour aborder le calcul numérique (à l'aide d'un outil informatique) des solutions d'un problème "réel", on passe par les étapes suivantes :

1. Description qualitative des phénomènes physiques.
   Cette étape est effectuée par des spécialistes des phénomènes que l'on veut quantifier (ingénieurs, chimistes, biologistes etc.....)
2. Modélisation
   Il s'agit, à partir de la description qualitative précédente, d'écrire un modèle mathématique. On supposera ici que ce modéle amène è un système d'EDP (équations aux dérivées partielles). Dans la plupart des cas, on ne saura pas calculer une solution analytique, explicite, du modèle ; on devra faire appel à des techniques de résolution approchée.
3. Analyse mathématique Même si l'on ne sait pas trouver une solution explicite du modèle, il est important d'en étudier les propriétés mathématiques, dans la mesure du possible. Il est bon de se poser les questions suivantes :
   - Le problème est-il bien posé? c'est-à-dire y-a-t'il existence et unicité de la solution?
   - Les propriétés physiques auxquelles on s'attend sont elles satisfaites par les solutions du modèle mathématique? Si $u$ est une concentration, par exemple, peut-on prouver qu'elle est toujours positive?
   - Y a-t-il continuité de la solution par rapport aux données?
4. Discrétisation et ré solution numé rique
   Un problème posé sur un domaine continu (espace – temps) n'est pas résoluble tel quel par un ordinateur, qui ne peut traiter qu'un nombre fini d'inconnues. Pour se ramener à un problè me en dimension finie, on discré tise l'espace et/ou le temps. Si le problè me original est liné

aire on obtient un systè me liné aire. Si le problè me original est non liné aire (par exemple s'il s'agit de la minimisation d'une fonction) on aura un systè me non liné aire à résoudre par une méthode de Newton...

5. Analyse numérique

   Une fois le problème discret obtenu, il est raisonnable de se demander si la solution de ce problème est proche, et en quel sens, du problème continu. De même, si on doit mettre en oeuvre une méthode itérative pour le traitement des non-linéarités, il faut étudier la convergence de la méthode itérative proposée.

6. Mise en oeuvre, programmation et analyse des résultats

   La partie mise en oeuvre est une grosse consommatrice de temps. Actuellement, de nombreux codes commerciaux existent, qui permettent en thÂ´eorie de résoudre "tous" les problèmes. Il faut cependant procéder à une analyse critique des résultats obtenus par ces codes, qui ne sont pas toujours compatibles avec les propriétés physiques attendues...

### Principales méthodes de discrétisation

- Méthode de différences finies, voir [GOD 77]
- Méthode volumes finis, voir [EYM 00]
- Méthodes variationnelles, méthodes d'éléments finis, voir [CIA 78]
- Méthodes spectrales, voir [BER 92]

## Notre objective et notre méthodologie pour présenter notre cours

Le but de notre cours est d'initier à la méthode de volumes finis.
A l'aides des modèles simples, on présente le cours d'une maniere simple qui necessite un bagage minimum d'analyse.

## Principes des méthodes de différences et volumes finis

On considère un domaine physique $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, avec $d$ est la dimension de l'espace. Le principe des méthodes de différences finies consiste à se donner un certain nombre de points du domaine, qu'on notera $(x_1 ... x_N) \subset (\mathbb{R}^d)^N$. On approche alors l'opérateur différentiel en espace en chacun des $x_i$ par des quotients différentiels.
Il faut alors discrétiser la dérivée en temps : on pourra par exemple considérer un schéma d'Euler explicite ou implicite pour la discrétisation en temps.
Les méthodes de volumes finis sont adaptées aux équations de conservation et utilisées en mécanique

des fluides depuis plusieurs décennies. Le principe consiste à découper le domaine en des "volumes de contrôle" ; on intègre ensuite l'équation de conservation sur les volumes de contrôle ; on approche alors les flux sur les bords du volume de contrôle par une technique de différences finies.

## Perspectives

Comme la méthode de différences finies est la plus ancienne et peut etre la base des méthodes numériques d'approximation des equations differentielles, alors l'apprentissage d'une telle méthode va permettre l'etudiant de comprende la base mathématique des méthodes numériques.
La méthode de volumes finis est parmis les méthodes les plus universelles. D'un autre coté, y'a beaucoup de groupes de recherche a travers le monde qui travaillent dans cette méthode riche. Donc l'etudiant peut avoir des relations avec la communauté de volumes finis; ce qui est intéressant pour le futur recherche de l'etudiant.

## Plan du cours

Chapitre 1 Introduction

1. Méthode de differences et volumes finis pour l'equation $-u^{''} = f$
2. Comparaison entre les deux méthodes

Chapitre 2 Méthode de volumes finis pour une équation elliptique unidimensionnelle

1. Méthode de volumes finis pour une équation elliptique unidimensionnelle
2. Théoreme de convegence et estimation d'erreur
3. Volumes finis pour l'equation elliptique générale de second ordre

Chapitre 3 Méthode de volumes finis pour une équation elliptique en 2D

1. Des exemples de discrétisations par volumes finis en 2D
2. Approximation par volumes finis de l'équation de la chaleur "equation de Laplace"
3. Théoreme de convegence et estimation d'erreur

Chapitre 4 Méthode de volumes finis pour une équation parabolique en 1D

1. Inroduction
2. Maillages et schémas
3. Théoreme de convegence et estimation d'erreur

Chapitre 5 Méthode de volumes finis pour une équation hyperbolique en 1D

1. Inroduction
2. Maillages et schémas
3. Théoreme de convegence et estimation d'erreur

## References

[BER 92] C. Bernardi and Y. Maday: Approximation Spectrale de Problèmes aux limites. *Springer–Verlag France, Paris*, 1992.

[CIA 78] P. G. Ciarlet: The Finite Element Method for Elliptic Problems. *Norhh Holand, Amsterdam*, 1978.

[EYM 00] R. Eymard, T. Gallouët and R. Herbin: Finite volume methods. *Handbook of Numerical Analysis. P. G. Ciarlet and J. L. Lions (eds.)*, **VII** , 723-1020, 2000.

[GOD 77] S. Godunov and V. Riabenki: Schémas aux Differences.*Editions Mir, Moscow, (French)*, 1977.