University of Annaba–"M.I. Mathematiques et Informatique LMD"
First year undergraduation **2011–2012**

Analyse

Real numbers

Not finished yet; last update 7th Oct. 2011

Exercice 1. ($\sqrt{2}$ est Irrationnel: une premiere methode de preuve)

Supposons que $\sqrt{2} = a/b$ avec a et b deux entiers premiers entre eux et $b \neq 0$, montrer que

1. a est paire.
2. b est paire.

En deduire que $\sqrt{2}$ est Irrationnel, i.e. $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Solution:

1. Preuve que a est paire: supposons que $\sqrt{2} = a/b$ avec deux naturels premiers entre eux, nous donne
$$2b^2 = a^2. \tag{1}$$
Ceci implique que 2 devise a^2 et par consequent 2 devise a.
2. Preuve que b est paire: d'apres la question precedente, on peut donc poser $a = 2k$ dans (1), avec $k \in \mathbb{N}^*$ pour trouver
$$b^2 = 2k^2. \tag{2}$$
Ce qui implique que 2 devise b^2 et par consequent b.

Supposons l'inverse, i.e. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, on peut alors ecrire $\sqrt{2}$ sous la forme a/b avec a et b deux entiers premiers entre eux et $b \neq 0$. On utilise les deux questions precedentes pour avoir que a et b ont 2 comme un deviseur commun; ceci est contradictoire avec le fait que a et b deux entiers premiers entre eux.

Exercice 2. ($\sqrt{2}$ est Irrationnel: une deuxieme methode de preuve)
Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

1. Justifier que l'ensemble suivant n'est pas vide:
$$\Omega = \{n \in \mathbb{N}^\star ; n\sqrt{2} \in \mathbb{Z}\}. \tag{3}$$
2. Justifier que l'ensemble Ω a un minimum noté par n_0.
3. Justifier que $n_0\sqrt{2} - n_0 \in \Omega$.

En deduire que $\sqrt{2}$ est Irrationnel, i.e. $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Solution:

1. Comme $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, alors $\sqrt{2} > 0$ alors existent deux nombres $a, b \in \mathbb{N}$ avec $b \neq 0$ tel que $b\sqrt{2} = a$ et par consequent $a \in \Omega$. D'ou $\Omega \neq \emptyset$.
2. Comme $\Omega \subset \mathbb{N}^\star \subset \mathbb{N}$, alors Ω possede un minimum noté par n_0.
3. Remarquons tout d'abord que $n_0\sqrt{2} - n_0 = n_0(\sqrt{2} - 1) > 0$. Ceci avec le fait que $n_0\sqrt{2} - n_0 \in \mathbb{Z}$ implique

$$n_0\sqrt{2} - n_0 \in \mathbb{N}^\star. \tag{4}$$

D'un autre part $(n_0\sqrt{2} - n_0)\sqrt{2} = 2n_0 - n_0\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$, car $n_0\sqrt{2} \in \mathbb{N}^\star \subset \mathbb{Z}$ et $n_0 \in \mathbb{N}^\star \subset \mathbb{Z}$, $n_0\sqrt{2} - n_0 \in \mathbb{Z}$ et par consequent

$$(n_0\sqrt{2} - n_0)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Ceci avec (4) implique que

$$n_0\sqrt{2} - n_0 \in \Omega. \tag{6}$$

Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ implique que l'ensemble Ω donn par (3) n'est pas vide et possede un minimum $n_0 \in \Omega$. Mais d'apres les questions precedentes $n_0\sqrt{2} - n_0 \in \Omega$. Ceci implique que $n_0\sqrt{2} - n_0 \geq n_0$ et par consequent $\sqrt{2} > 2$; contradiction.

Exercice 3. (Les nombres rationnels)

1. Utiliser seulement $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ le fait que pour demontrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
2. En deduire que $\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Solution:

1. Supposons que

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q} \tag{7}$$

implique que

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \in \mathbb{Q} \tag{8}$$

et par consequent

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}. \tag{9}$$

Ceci avec (7) implique que $\sqrt{2} + \sqrt{3} - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \in \mathbb{Q}$. Ce qui est equivalent a $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$; contradiction avec le fait que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
On peut analyser d'une autre maniere. Supposons que $\sqrt{3} + \sqrt{2} = r \in \mathbb{Q}$ implique que $3 = r^2 - 2\sqrt{2}r + 2$. Par consequent $\sqrt{2} = (r^2 - 1)/(2r) \in \mathbb{Q}$; contradiction.

2. Supposons que

$$\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \in \mathbb{Q}, \tag{10}$$

implique que

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \in \mathbb{Q}. \tag{11}$$

Ce qui est contradictoire avec la question precedente.

Exercice 4. (La partie entiere d'un nombre réel)

Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$
$$[x+n] = [x] + n. \tag{12}$$
2. $$[x] \leq x < [x+1] = [x] + 1. \tag{13}$$
3. $$[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1. \tag{14}$$
4. $$[x] - 1 < x < [x] + 1. \tag{15}$$
5. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$
$$\left[\frac{n-1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \left[\frac{n+4}{4}\right] = n. \tag{16}$$
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\left[\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2\right] = 4n + 1. \tag{17}$$

Solution:

1. En utilisant le fait que $[x] \leq x < [x] + 1$ pour avoir
$$[x] + n \leq x + n < [x] + n + 1 \tag{18}$$
Comme $[x] + n \in \mathbb{Z}$ alors (18) entraine $[x+n] = [x] + n$.
2. En utilisant le fait que $[x] \leq x < [x] + 1$ et $[x] + 1 = [x+1]$ (posons $n = 1$ dans (12)) on trouve (13).
3. En utilisant le fait que $[x] \leq x < [x] + 1$ et $[y] \leq y < [y] + 1$ pour avoir
$$[x] + [y] \leq x + y < [x] + [y] + 2. \tag{19}$$
Ceci entraine que (rappelons que si $M \in \mathbb{Z}$ et $M \geq x$ alors $M \geq [x] + 1$)
$$[x] + [y] + 2 \geq [x+y] + 1 \tag{20}$$
et (rappelons que si $m \in \mathbb{Z}$ et $m \leq x$ alors $m \leq [x]$)
$$[x] + [y] \leq [x+y]. \tag{21}$$
Les deux inegalités (20) et (21) entrainent l'inegalité demandée (14).
4. Le fait que $[x] \leq x < [x] + 1$ entraine que $[x] - 1 < x < [x] + 1$.
5. Posons $n = 4k + r$ avec $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ et utilisons (12) pour trouver
$$\left[\frac{n-1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \left[\frac{n+4}{4}\right] = 4k + \left[\frac{r-1}{2}\right] + \left[\frac{r+2}{4}\right] + \left[\frac{r+4}{4}\right]. \tag{22}$$
Remplaçons r par ses valeurs $\{0, 1, 2, 3\}$, on trouve
$$\left[\frac{r-1}{2}\right] + \left[\frac{r+2}{4}\right] + \left[\frac{r+4}{4}\right] = r. \tag{23}$$
Utilisons maintenant (22) et (23) pour trouver (16).

6. Remarquons que
$$\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 = 2n+1+2\sqrt{n(n+1)}. \tag{24}$$
Ceci avec le fait que $\sqrt{n(n+1)} \geq \sqrt{n^2} = n$ et $2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1$ nous donnent
$$(4n+1) \leq \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 < (4n+1)+1. \tag{25}$$
Ce qui implique que (17).

Exercice 5. (Borne sup et borne inf)

Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous ensembles de $\mathbb{R}$. On definit:

$$\mathcal{A}+\mathcal{B} = \{a+b; a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}. \tag{26}$$

1. Montrer que si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont bornées, alors $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ l'est aussi.
2. Montrer que
$$\inf(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \inf(\mathcal{A}) + \inf(\mathcal{B}). \tag{27}$$
3. Montrer que
$$\sup(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \sup(\mathcal{A}) + \sup(\mathcal{B}). \tag{28}$$

Solution:

1. Supposons que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont bornées, alors
$$\inf(\mathcal{A}) + \inf(\mathcal{B}) \leq \ a+b \leq \sup(\mathcal{A}) + \sup(\mathcal{B}),\ \forall (a,b) \in \mathcal{A}\times\mathcal{B}. \tag{29}$$
2. D'apres (29), on remarque que $\inf(\mathcal{A})+\inf(\mathcal{B})$ est un minorant; pour demontrer alors (27) il fallait prouver que $\inf(\mathcal{A})+\inf(\mathcal{B})$ est le plus grand des minorants. Soit $\varepsilon > 0$, il existe alors $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{B}$ tel que
$$\inf(\mathcal{A}) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \ a \tag{30}$$
et
$$\inf(\mathcal{B}) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \ b. \tag{31}$$
Faisant la somme de (30) et (31) pour trouver
$$\inf(\mathcal{A}) + \inf(\mathcal{B}) + \varepsilon \geq \ a+b. \tag{32}$$
Ceci equivalent de dire que $\inf(\mathcal{A})+\inf(\mathcal{B})+\varepsilon$ n'est pas un minorant pour quelque soit $\varepsilon > 0$.

Exercice 6. (Critere sequentiel d'une borne sup.) Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ un ensemble borné. Montrer que les propositions suivantes sont equivalentes:

1. Proposition A: $M = \sup\mathcal{A}$.
2. Proposition B:
   (a) M est un majorant:
   $$\forall\, a \in \mathcal{A}:\ \ a \leq \ M. \tag{33}$$
   (b) Existe une suite $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$:
   $$\lim_{n\to+\infty} a_n = M. \tag{34}$$

Solution :

1. Supposons que la proposition A est verifiée. Donc M est un majorant. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^\star$, comme $M - (1/n) < M$, alors $M - (1/n) < M$ n'est pas un majorant. Par consequent, existe $a_n \in \mathcal{A}$ tel que $M - (1/n) < a_n < M$. Remarquons lorsque $n \to \infty$, $a_n \to M$. D'ou la proposition B.
2. Supposons que la proposition B est verifiée. Pour demontrer la proposition A, il suffit de demontrer que M est le plus petit des majorant, i.e. $M - \varepsilon$ n'est pas majorant pour tout $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty} a_n = M$, alors existe n_0 tel que $M - a_{n_0} \leq \varepsilon$. D'ou $M - \varepsilon < a_{n_0}$ et par consequent $M - \varepsilon$ n'est pas majorant.

Exercice 7. (Borne sup de produit)

Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous ensembles de $\mathbb{R}_+$. On definit:

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \{ab; a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}. \tag{35}$$

1. Montrer que si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont majorés, alors $\mathcal{A}\mathcal{B}$ l'est aussi.
2. Montrer que
$$\sup(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \sup(\mathcal{A})\sup(\mathcal{B}). \tag{36}$$
Est ce que ceci encore vrai si $\mathcal{A}$ où $\mathcal{B}$ contient des réels négatives?

Solution:

1. Supposons que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont majorés, alors $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont des bornes sup. Comme $a \leq \sup(\mathcal{A})$, pour tout $a \in \mathcal{A}$, et $b \leq \sup(\mathcal{B})$, pour tout $b \in \mathcal{B}$, alors (sachant que $a, b \geq 0$) $ab \leq \sup(\mathcal{A})\sup(\mathcal{B})$, pour tout $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{B}$. Donc $\mathcal{A}\mathcal{B}$ est majoré.
2. D'apres la question precedente, $\mathcal{A}\mathcal{B}$ admet une borne sup. et
$$\sup(\mathcal{A}\mathcal{B}) \leq \sup(\mathcal{A})\sup(\mathcal{B}). \tag{37}$$
On va demontrer que (37) par deux methodes:

   1ere methode:
   Existe une suite $(a_n)_n \subset \mathcal{A}$ tel que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup(\mathcal{A})$ et une suite $(b_n)_n \subset \mathcal{B}$ tel que $\lim_{n\to\infty} b_n = \sup(\mathcal{B})$. Par consequent $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim a_n \lim b_n = \sup(\mathcal{A})\sup(\mathcal{B})$. Ceci avec le fait que $(a_n b_n)_n \subset \mathcal{A}\mathcal{B}$ et $\sup(\mathcal{A})\sup(\mathcal{B})$ est un majorant de $\mathcal{A}\mathcal{B}$, voir (37), implique que $\sup(\mathcal{A})\sup(\mathcal{B})$ est la borne sup. de $\mathcal{A}\mathcal{B}$.

   2eme methode:
   Supposons que $\sup(\mathcal{A})\sup(\mathcal{B})$ n'est pas la borne sup. de $\mathcal{A}\mathcal{B}$, existe alors $\delta > 0$ tel que $\sup(\mathcal{A})\sup(\mathcal{B}) - \delta$ est un majorant (donc $\sup(\mathcal{A})\sup(\mathcal{B}) - \delta$ est positive) de $\mathcal{A}\mathcal{B}$. D'ou
$$\sup(\mathcal{A})\sup(\mathcal{B}) - \delta \geq ab, \ \forall\ (a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}. \tag{38}$$
Supposons que $\mathcal{A} \neq \{0\}$, (38) entraine, pour un a fixé
$$\frac{\sup(\mathcal{A})\sup(\mathcal{B}) - \delta}{a} \geq b, \ \forall\ b \in \mathcal{B}. \tag{39}$$
Donc $\dfrac{\sup(\mathcal{A})\sup(\mathcal{B}) - \delta}{a}$ est un majorant de $\mathcal{B}$, et par consequent
$$\frac{\sup(\mathcal{A})\sup(\mathcal{B}) - \delta}{a} \geq \sup(\mathcal{B}). \tag{40}$$

Ceci implique que, on suppose que $\mathcal{B} \neq \{0\}$ (equivalent de dire que $\sup(\mathcal{B}) \neq 0$)

$$\frac{\sup(\mathcal{A})\sup(\mathcal{B}) - \delta}{\sup(\mathcal{B})} \geq a. \tag{41}$$

L'inégalité entraine alors que

$$\frac{\sup(\mathcal{A})\sup(\mathcal{B}) - \delta}{\sup(\mathcal{B})} \geq \sup(\mathcal{A}). \tag{42}$$

Ce qui est equivalent de dire que

$$\sup(\mathcal{A})\sup(\mathcal{B}) - \delta \geq \sup(\mathcal{A})\sup(\mathcal{B}), \tag{43}$$

ce qui est contradiction car $\delta > 0$.

Le résultat reste pas vrai si $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ contient des réels négatives. On prend $\mathcal{A} = \mathbb{R}^-$ (majoré par 0) et $\mathcal{B} = \{-1\}$ (majoré par -1) et par consequent $\mathcal{AB} = \mathbb{R}^+$ qui est pas majoré.

Exercice 8. (Point fixe et borne sup.)

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application croissante.

1. Considerons l'ensemble suivant

$$\Omega = \{x \in [0,1];\ x \leq f(x)\}. \tag{44}$$

   Montrer que Ω possede une borne superieure α verifiant $\alpha \leq f(\alpha)$.

2. Montrer que $\alpha \geq f(\alpha)$.

En deduire que f laisse invariant au moins un point de $[0,1]$.

Solution:

1. Remarquons tout d'abord que $f(0) \geq 0$ et par consequent $0 \in \Omega$. En deduit que Ω est non vide. Comme $\Omega \subset [0,1]$, alors Ω est borné. L'ensemble Ω possede une borne superieure α. Comme, pour tout $x \in \Omega$: $x \leq \alpha$, alors (f est croissante) $x \leq f(x) \leq f(\alpha)$. Ce qui implique que $f(\alpha)$ est un majorant de Ω. D'ou $\alpha \leq f(\alpha)$.
2. Comme $\alpha \leq f(\alpha)$ (la question precedente), alors (f est croissante) $f(\alpha) \leq f(f(\alpha))$. Donc $f(\alpha) \in \Omega$. Mais α est la borne sup., d'ou $f(\alpha) \leq \alpha$.

On utilises alors les resultats precendents pour avoir $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 9. (Definition axiomatique de $\mathbb{R}$)

En utilisant la definition axiomatique de $\mathbb{R}$, montrer que

$$1 > 0. \tag{45}$$

Solution:

Supposons que

$$1 \leq 0. \tag{46}$$

Nous avons alors deux cas possibles

1. 1er cas
$$1 = 0. \tag{47}$$
Ceci nous conduit au cas
$$\forall x \in \mathbb{R} : x = 0. \tag{48}$$
Donc $\mathbb{R}$ n'est pas un corps; contradiction avec le fait que $\mathbb{R}$ est un corps (d'apres les axiomes de $\mathbb{R}$).
2. 2eme cas
$$1 < 0. \tag{49}$$
Donc
$$-1 > 0. \tag{50}$$
Et par consequent (notons que $1 + (-1) = 0$ entraine que $1 = (-1)(-1)$)
$$1 = (-1)(-1) > 0. \tag{51}$$
Contradiction avec (49).

Exercice 10. (Exemple d'une partie non majoré de $\mathbb{R}$)

1. Montrer que l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres naturels n'est pas majoré.
2. En deduire que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels n'est pas majoré

Solution:

1. Supposons que $\mathbb{N}$ est majoré. Donc $\mathbb{N}$ possede une borne superieure $S \in \mathbb{R}$.
Soit Ω l'ensemble donné par
$$\Omega = \{n \in \mathbb{N} : n \leq S\}. \tag{52}$$
Comme $\Omega \subset \mathbb{N}$ alors possede un maximum $m \in \mathbb{N}$ verfiant $S < m + 1$. Comme $m + 2 \in \mathbb{N}$ alors $m + 2 \leq S < m + 1$. Contradiction.
On peut demontrer que $\mathbb{N}$ n'est pas majoré par une autre façon. Supposons que $\mathbb{N}$ est majoré. Donc $\mathbb{N}$ possede une borne superieure $S \in \mathbb{R}$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n + 1 \in \mathbb{N}$, on a alors $n + 1 \leq S$. D'ou, $n \leq S - 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. $S - 1$ est alors majorant de $\mathbb{N}$ et par consequent $S \leq S - 1$. Contradiction.
2. Comme $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ et $\mathbb{N}$ n'est pas majoré alors $\mathbb{Q}$ n'est pas majoré.

Problèmes supplémentaires

Problème 1 (Representation decimale des nombres rationnels)

1. Montrer que la representation decimale d'un nombres rationnel ou bien est finie où periodique a partir ce certain rang.
2. Montrer que toute epresentation decimale finie où periodique a partir ce certain rang est une nombre rationnel.

Problème 2 ($\exp(1)$ est Irrationnel)

En utilisant le fait que

$$\exp(1) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \right) \tag{53}$$

montrer que

$$\exp(1) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \tag{54}$$