Ecole Préparatoire
Aux Sciences et Techniques.
Annaba.
Module d'Analyse II.

Série de T.D. N°3

Fonctions de plusieurs variables.
(Dérivées composées,formule de Taylor et extéma).

Exercice 1.
i) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^k, k \geq 1$ est soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$$

Montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

Exercice 2. Trouver $\dfrac{dz}{dt}$ lorsque $z = 2x^2 + xy + y^2$ si $x(t) = \sin t$ et $y(t) = \cos \dfrac{t}{2}$.

Exercice 3.
1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2
et soit

$$g : (x, y) \to g(x, y) = f(x^2 - y^2, 2xy).$$

Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.
2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et soient r et θ les coodonnées polaires dans le plan de telle sorte que l'association

$$\begin{array}{rcl}]0, \infty[\times]0, 2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (r, \theta) & \to & (r\cos\theta, r\sin\theta). \end{array}$$

soit un changement de variables. Soit F la fonction définie par

$$F(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Exprimer le laplacien de f en coordonnées polaires (ie:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r, \theta)$$

Exercice 4.

Calculer les différentielles suivantes sans calculer les dérivées partielles (utiliser les propriétés de la différentielle de la somme, du produit et de la composée des fonctions)

a) $f(x,y) = \ln(xy)$; *b)* $f(x,y,z) = xyz(1+\sinh(yz)))$; *c)* $f(x,y) = \sin(x^2y)e^{x-y}$.

Exercices 5. Ecrire le développement limité à l'ordre 2 pour la fonction f au voisinage du point indiqué et en déduire l'équation du plan tangent.

$$\begin{aligned} i)\ f(x,y) &= xy + x^2 + 4y^2 \text{ en } (1,2); \quad ii)\ f(x,y) = x^2y + 3yx + y^4 \text{ en } (1,2) \\ iii)\ (x,y) &= \ln(1+3y+2x) \text{ en } (0,0). \end{aligned}$$

Exercice 6.

On demande à un étudiant de trouver l'équation du plan tangent à la surface $z = x^4 + y^2$ au point $(2,3,7)$, sa réponse est

$$z = 4x^3(x-2) - 2y(y-3)$$

1- Expliquer, sans calcul, pourqoui cela ne peut en aucun cas être la bonne réponse.

2- Quelle est l'erreur commise par l'étudiant?

3- Donner la bonne réponse.

Exercice 7.

Soit

$$f(x,y) = e^x \cos y$$

i) Trouver le développement à l'ordre 0, 1, 2 et 3 de f au voisinage du point $(0, \frac{\pi}{3})$.

ii) Donner les valeurs approchées de $f(\frac{-1}{10}, \frac{\pi}{3} + \frac{1}{50})$ en utilisant les approximations de (i).

Exercice 8.

Trouver les points sur le paraboloide $z = 4x^2 + y^2$ où le plan tangent est parallèle au plan $x + y + z = 6$.

Même question avec le plan $3x + y - 2z = 3$.

Exercice 9. Calculer les matrices hessiennes des fonctions f définies par les expréssions suivantes sur leur domaine de définition

$$iv)z\ f(x,y,z) = \sin(xyz), \qquad f(x,y) = \sin^2(\frac{x}{y})$$

Exercice 10.
Chercher les points critiques des fonctions suivantes:

$$i)\ f(x,y) = 2x^2y + 2x^2 + y. \quad ii)\ f(x,y) = xy^2(1 + x + 3y)$$

Exercice 11. Pour chacune des fonctions suivantes étudier la nature du point critique donné:

$$\begin{aligned} i)\ f(x,y) &= x^2 - xy + y^2 \text{ au point } (0,0). \\ ii)\ f(x,y) &= x^2 + 2xy + y^2 + 6 \text{ au point } (0,0). \\ iii)\ f(x,y) &= x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10. \text{ au point } (0,0). \end{aligned}$$

Exercice 12.
Trouver les points critiques des fonctions suivantes et déterminer si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selles.

$$\begin{aligned} i)\ f(x,y) &= \sin x + y^2 - 2y + 1 \quad ii)\ f(x,y) = \exp(x^2 + y^2 - 2x + 2y) \\ iii)\ f(x,y) &= \cos(x+y) + \sin y \quad iv)\ f(x,y) = (x+y)\exp(-(x^2+y^2)). \end{aligned}$$

Exercice 13.
Etudier les extréma relatifs de la fonction f :

$$i)\ f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y; \quad ii)\ f(x,y) = xe^y + ye^x$$

Admet-elle des des extréma absolus (globaux).

Exercice 14 (facultatif).
a) Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 au point $(0,0)$ des fonctions suivantes:

$$\begin{aligned} i)\ f(x,y) &= e^{xy}, \\ ii)\ f(x,y) &= e^x \sin y, \\ iii)\ f(x,y) &= e^{x+y} + x\cos y \end{aligned}$$

b) Calculer approximativement à l'aide du développement limité du second ordre $(0,95)^{2,01}$.