University of Annaba–“Ecole Preparatoire aux Sciences et Techniques”
Second year undergraduation **2010–2011**

Suites et series de fonctions

Convergence simple et uniformes

Exercice 1. (Vrai et Faux)
Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers f sur intervalle $I = [a, b]$. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses:

1. Si (f_n) sont croissantes, alors f aussi.
2. Si (f_n) sont strictement croissantes, alors f aussi.
3. Si (f_n) sont periodiques, alors f aussi.
4. Si (f_n) sont continues en un point $x_0 \in I$, alors f aussi.

Exercice 2. (Convergence simple et uniforme)
Etudier la convergence simple et uniforme des suites des fonctions suivantes:

1. $f_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$ sur $]-1, 1[$ puis sur $]-a, a[$ avec $0 \leq a < 1$
2. $f_n = nx^n \ln(x)$, $f_n(0) = 0$ sur $[0, 1]$.
3. $f_n = \exp(-nx) \sin(2nx)$ sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a, +\infty)$ avec $a > 0$.

Exercice 3. (Fonction Expo)
Montrer que $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$ converge uniformement vers $\exp(x)$ sur tout intervalle $[a, b]$.

Exercice 4. (Convergence simple et uniforme d’une serie)
Soit f_n definie par:

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \tan(\frac{x}{2^k}), \ x \in]-\pi, \pi[. \tag{1}$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement.
2. Trouver la limite (utiliser $\tan(\frac{y}{2}) = \cot(\frac{y}{2}) - 2\cot(y)$).
3. Etudier la convergence uniforme.

Exercice 5. (Etude qualitative)
Considerons la fonction definie par

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}. \tag{2}$$

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
2. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$ et $\lim_{n\to+\infty} I_n$. En deduire que (f_n) converge pas uniformement sur $[0, 1]$.
3. Demontrer directement que (f_n) converge pas uniformement sur $[0, 1]$.

Exercice 6. (Convergence simple et uniforme)
Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) definie par

$$f_n(x) = \frac{nx^2 \exp(-nx)}{(1 - \exp(-x))^2}. \tag{3}$$

1. Montrer l'existence de $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.
2. Etudier $\lim_{n\to\infty} I_n$.