University of Annaba–"Ecole Preparatoire aux Sciences et Techniques"
Second year undergraduation **2010–2011**

Integrales Impropres

(last update Friday, May 27th 2011.)

Exercice 1.

1. Etudier la convergence de
$$\int_0^1 \ln x dx \tag{1}$$
2. Etudier la convergence de
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1} dx \tag{2}$$
3. Montrer que l'integrale suivante est convergente:
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+\sqrt{x^3+1}} \tag{3}$$
4. Montrer que l'integrale suivante est convergente si et seulement si $p > 1$
$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p} dx \tag{4}$$

Solution

1. Une integration par partie nous donne, pour tout $1 > \varepsilon > 0$
$$\int_\varepsilon^1 \ln x dx = x \ln x - x|_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon. \tag{5}$$
Ceci avec le fait que $\lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$, implique que
$$\lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} \int_\varepsilon^1 \ln x dx = -1, \tag{6}$$
ce que cegnifie que l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \ln x dx$ est convergente.
On peut justifier la convergence utilisant le fait que $\displaystyle\lim_{x \to 0, x > 0} \sqrt{x} \ln x = 0$. En effet, ce resultat implique qu'il existe $\eta > 0$ tel que $0 < x < \eta$ implique que $\ln x \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Ceci avec le fait que l'integrale $\displaystyle\int_0^\eta \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ est convergente implique que $\displaystyle\int_0^\eta \ln x dx$ est convergente. Comme $\displaystyle\int_\eta^1 \ln x dx$ existe et finie, on deduit que $\displaystyle\int_0^1 \ln x dx$ est convergente.
2. On doit etudier les quatres integrales:
   (a) Singularite au point 0 (car $x \to \ln x$ n'est pas definie en 0)
$$\int_0^c \frac{\ln x}{x^2-1} dx, \ 0 < c < 1. \tag{7}$$
   Cette integrale est convergente car $\dfrac{\ln x}{x^2-1} \sim -\ln x$, $\displaystyle\int \ln x dx = x \ln x - x$, et $\displaystyle\lim_{x \to 0} x \ln x \to 0$.

(b) Singularite au point 1: il suffit de remarquer que $\frac{\ln x}{x^2-1} \sim \frac{1}{2}$. Ceci implique que les integrales suivantes sont convergents:

$$\int_c^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx,\ 0 < c < 1. \tag{8}$$

$$\int_1^a \frac{\ln x}{x^2-1} dx,\ a > 1. \tag{9}$$

(c) Singularite au $+\infty$: il suffit de remarquer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln x}{x^2-1}}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} = 0. \tag{10}$$

3. il suffit de remarquer

$$\frac{dx}{x+\sqrt{x^3+1}} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},\ x \sim \infty \tag{11}$$

4. Etudions deux cas $p \leq 1$ et $p > 1$:

(a) remarquons que $p \leq 1$, nous avons pour $x > e$,

$$\frac{\ln x}{x^p} \geq \frac{1}{x^p}. \tag{12}$$

(b) remarquons que $p > 1$. On peut ecrire $p = 1 + \frac{q}{2} + \frac{q}{2}$ avec $q > 0$, et donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln x}{x^p}}{\frac{1}{x^{1+\frac{q}{2}}}} = 0. \tag{13}$$

Ce qui donne la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p} dx$ pour $p > 1$.

Donc l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p} dx$ est convergente seulement pour $p > 1$.

Exercice 2.

1. Etudier la convergence de

$$\int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{t}} dt \tag{14}$$

2. Etudier la convergence de

$$\int_0^{+\infty} 1 + t\ln\left(\frac{t}{1+t}\right) dt \tag{15}$$

Solution

1. Remarquons que (y'a seulement la singularite au point 1)

$$\frac{1}{1-\sqrt{t}} = \frac{1+\sqrt{t}}{1-t} \sim \frac{2}{1-t},\ t \in \mathcal{V}_1. \tag{16}$$

Ceci avec le fait que $\int_0^1 \frac{1}{1-t} dt$ est divergente entraine la divergence de $\int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{t}} dt$.

2. Nous avons deux singularites

(a) Singularite au point 0: comme $\lim_{t\to 0, t>0} 1 + t\ln\left(\frac{t}{1+t}\right) = 1$, alors

$$\int_0^1 1 + t\ln\left(\frac{t}{1+t}\right) dt, \tag{17}$$

est convergente.

(b) Singularite a l'infini: on utilise le fait que

$$\ln\left(\frac{t}{1+t}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{1+t}\right) \sim -\frac{1}{1+t},\ t \in \mathcal{V}_\infty. \tag{18}$$

Ceci implique que

$$1 + t\ln\left(\frac{t}{1+t}\right) \sim \frac{1}{1+t} \sim \frac{1}{t},\ t \in \mathcal{V}_\infty. \tag{19}$$

Par consequent

$$\int_1^{+\infty} 1 + t\ln\left(\frac{t}{1+t}\right) dt, \tag{20}$$

est divergente.

L'integrale $\int_1^{+\infty} 1 + t\ln\left(\frac{t}{1+t}\right) dt$ est divergente.

Exercice 3. Montrer que $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente mais pas abosulement convergente (on dit alors qu'elle est semi-convergente).

Solution

1. Une integration par partie nous donne, pour tout $A > 1$

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{\sin x}{x} dx &= -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^A - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2} dx \\ &= \frac{\cos 1}{1} - \frac{\cos A}{A} - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2} dx. \end{aligned} \tag{21}$$

Comme $\frac{\cos^2 x}{x} \le \frac{1}{x^2}$ et $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ est convergente alors, utilisant (21), $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente.

Un raisonnement semblabe nous donne aussi la convergence de $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x} dx$

2. Comme $\sin x \le 1$ alors,

$$|\sin x| \ge \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}. \tag{22}$$

Ceci implique que, pour tout $A > 1$

$$\int_1^A \frac{|\sin x|}{x} dx \ge \int_1^A \frac{1}{2x} dx - \int_1^A \frac{\cos 2x}{2x} dx. \tag{23}$$

Comme $\int_1^\infty \frac{1}{2x} dx$ est divergente et $\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x} dx$ est convergente alors, utilisant (23), $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$ est divergente.

Exercice 4.

Rappelons Theoreme d'Abel: Soit f et g deux fonctions localement integrables sur $[a, b[$ et verifiant:

1. f est monotone et $\lim_{x\to b} f(x) = 0$,
2. Existe k tel que, pour tout $x \in [a, b[$: $|\int_a^x g(t)dt| \le k$.

Alors l'integrale $\int_a^b f(t)g(t)dt$ est convergente.

1. En utilisant, le Theoreme d'Abel, prouver que les integrales suivantes sont convergentes
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt, \ \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t} dt. \tag{24}$$
2. En deduire la convergence de
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t} + \cos t} dt. \tag{25}$$

Solution

1. Aplications immediates
2. Il suffit de remarquer que
$$\frac{\sin t}{\sqrt{t} + \cos t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \left(1 - \frac{\cos t}{\sqrt{t}} + \frac{\cos^2 t}{t\left(1 + \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right)} \right) \tag{26}$$

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction integrable sur tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$, continue en 0 et telle que $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ soit convergente.

1. Montrer que l'integrale suivante est convergente
$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{f(\beta x) - f(\alpha x)}{x} dx, \tag{27}$$
pour tout $0 < \beta < \alpha$.
2. Calculer $I(\alpha, \beta)$.

Solution

1. avec changement de variables convenables ($\beta x = t$ et $\alpha x = t$), on trouve
$$\begin{aligned} \int_m^M \frac{f(\beta x) - f(\alpha x)}{x} dx &= \int_m^M \frac{f(\beta x)}{x} dx - \int_m^M \frac{f(\alpha x)}{x} dx \\ &= \int_{\beta m}^{\beta M} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{\alpha m}^{\alpha M} \frac{f(t)}{t} dt \\ &= \int_{\beta m}^{\alpha m} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{\beta M}^{\alpha M} \frac{f(t)}{t} dt. \end{aligned} \tag{28}$$
La derniere integrale tend vers 0, quand $M \to +\infty$, car $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ est convergente.
Comme f est continue en 0 alors, pour tout $\epsilon > 0$, existe η tel que, pour tout $t \in (0, \eta)$, on a
$$| f(t) - f(0)| < \epsilon. \tag{29}$$
Ceci implique que, pour $\alpha m < \eta$
$$| \int_{\beta m}^{\alpha m} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{\beta m}^{\alpha m} \frac{f(0)}{t} dt| < \epsilon \int_{\beta m}^{\alpha m} \frac{dt}{t} = \epsilon \ln \frac{\alpha}{\beta}. \tag{30}$$

Comme $\int_{\beta m}^{\alpha m} \frac{f(0)}{t} dt = f(0) \ln \frac{\alpha}{\beta}$, la derniere proposition nous donne, pour $m < \frac{\eta}{\alpha}$

$$| \int_{\beta m}^{\alpha m} \frac{f(t)}{t} dt - f(0) \ln \frac{\alpha}{\beta} | < \epsilon \int_{\beta m}^{\alpha m} \frac{dt}{t} = \epsilon \ln \frac{\alpha}{\beta}. \tag{31}$$

Faisons $m \to 0$ et $M \to +\infty$ dans (28) et utilisons (31), on trouve

$$I(\alpha, \beta) = f(0) \ln \frac{\alpha}{\beta}. \tag{32}$$

Par exemple, pour $f(x) = \exp(-x)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-\beta x) - \exp(-\alpha x)}{x} dx = \ln \frac{\alpha}{\beta}. \tag{33}$$