EPST–Annaba
Module Analyse II
2015–2016

Série 3: Les Séries Numériques

Exercice 1. Au moyens de leur sommes partielles, etudier la nature des series suivantes et calculer leur sommes si elles existent:

$$1)\ \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n-1)n(n+1)} \quad 2)\ \sum_{n\geq 1} (2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) \quad 3)\ \sum_{n\geq 2} \left(\int_0^1 (1-\sqrt{x})^n dx\right) \tag{1}$$

Solution

- Solution de 1). A l'aide d'une decomposition en fractions simples, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-1)n(n+1)} &= -\frac{1}{n}+\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{2(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2n}\right)-\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n-1)}\right) \\ &= V_n - V_{n-1}, \end{aligned} \tag{2}$$

  avec

$$V_n = \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n}. \tag{3}$$

  Pour M fixé, nous avons alors (a partir de (2))

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{M} \frac{1}{(n-1)n(n+1)} &= \sum_{n=2}^{M} V_n - V_{n-1} \\ &= V_M - V_1 \\ &= V_M + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2(M+1)} - \frac{1}{2M} + \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{4}$$

  Ceci nous donne

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{4}. \tag{5}$$

- Solution de 2). On peut ecrire le terme general sous la forme

$$2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1} = V_n - V_{n-1}, \tag{6}$$

  avec

$$V_n = \sqrt{n}-\sqrt{n+1}. \tag{7}$$

  Pour M fixé, nous avons alors (a partir de (6))

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{M} 2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1} &= \sum_{n=1}^{M} V_n - V_{n-1} \\ &= V_M - V_0 \\ &= V_M + 1 \\ &= \sqrt{M}-\sqrt{M+1}+1. \end{aligned} \tag{8}$$

  Comme

$$\sqrt{M}-\sqrt{M+1} = \frac{-1}{\sqrt{M}+\sqrt{M+1}}. \tag{9}$$

  Alors $\lim_{M\to+\infty}(\sqrt{M}-\sqrt{M+1}) = 0$. Donc

$$\sum_{n\geq 1}(2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) = 1. \tag{10}$$

- Solution de 3). Avec le changement de variable $t = 1 - \sqrt{x}$, on trouve que

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-\sqrt{x})^n dx &= 2t^{n+1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{t}{n+2}\right)|_0^1 \\ &= V_n - V_{n+1}, \end{aligned} \tag{11}$$

avec

$$V_n = \frac{2}{n+1}. \tag{12}$$

Pour M fixé, nous avons alors (a partir de (11))

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{M}\left(\int_0^1 (1-\sqrt{x})^n dx\right) &= \sum_{n=2}^{M} V_n - V_{n+1} \\ &= V_2 - V_{M+1} \\ &= \frac{2}{3} - V_{M+1}. \end{aligned} \tag{13}$$

Comme $\lim\limits_{M\to+\infty} V_{M+1} = 0$, alors

$$\sum_{n\geq 2}\left(\int_0^1 (1-\sqrt{x})^n dx\right) = \frac{2}{3}. \tag{14}$$

Exercice 2.

Etudier les series suivantes dont le terme general est:

1. En utilisant la condition necessaire de convergence

$$1)\ \sqrt{n^2+n} - n \quad 2)\ \arcsin\frac{n^3+1}{n^3+2} \quad 3)\ (\ln\alpha)^{\ln n}\ (\alpha > e) \quad 4)\ (-1)^n \tag{15}$$

2. En utilisant le critere de Cauchy ou d' Alembert

$$1)\ \frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{(2n)^n} \quad 2)\ \left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n^2} \quad 3)\ \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad 4)\ \frac{n!}{2^n+1} \tag{16}$$

3. En utilisant les Théorèmes de Comparaison et d'equivalence

$$1)\ \ln\frac{2+n^\alpha}{1+n^\alpha}(\alpha>0) \quad 2)\ \sqrt{\frac{n-1}{n^4+1}} \quad 3)\ \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \quad 4)\ \frac{3^n-n^3}{5^n-2^n} \quad 5)\ \sin^2\left(\pi\left(n+\frac{1}{n}\right)\right) \tag{17}$$

4. En utilisant le critere integral

$$1)\frac{1}{n\ln n} \quad 2)\ \frac{1}{n\ln^2 n}. \tag{18}$$

Solution

1. Condition necessaire de convergence

   - Solution de 1). Multiplions par le conjugué, on trouve

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2+n} - n &= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \end{aligned} \tag{19}$$

     Ce qui implique que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n = \frac{1}{2}$ qui est differente de zero. La serie de terme general $\sqrt{n^2+n} - n$ est divergente.

   - Solution de 2). Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \arcsin\frac{n^3+1}{n^3+2} = \arcsin 1$ qui est differente de zero. La serie de terme general $\arcsin\frac{n^3+1}{n^3+2}$ est divergente.

   - Solution de 3). Comme $\lim\limits_{n\to\infty} (\ln\alpha)^{\ln n} = +\infty$ car $\ln\alpha > 1$ pour $\alpha > e$. La serie de terme general $(\ln\alpha)^{\ln n}$ est divergente.

- Solution de 4). Comme limite $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ n'existe pas alors la serie de terme general $(-1)^n$ est divergente.

2. Critere de Cauchy ou d' Alembert

- Solution de 1). Posons
$$U_n = \frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{(2n)^n}. \tag{20}$$
On peut ecrire U_n sous la forme
$$U_n = \frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{2^n n^n}. \tag{21}$$
Calculons U_{n+1}:
$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \frac{(n+2)(n+2)\dots(2n+2)}{2^{n+1}(n+1)^{n+1}} \\ &= \left(\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{2^n n^n}\right)\left(\frac{(2n+1)(2n+2)2^n n^n}{(n+1)2^{n+1}(n+1)^{n+1}}\right) \\ &= \left(\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{2^n n^n}\right)\left(\frac{(2n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}\right) \\ &= U_n \frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \end{aligned} \tag{22}$$
Ce qui implique que
$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \tag{23}$$
Calculons la limite de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$, on trouve
$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \tag{24}$$
Mais (rappelons que $\lim_{x\to 0}(1-x)^x = \frac{1}{e}$)
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{e}. \end{aligned} \tag{25}$$
Combinons (24) et (25) pour trouver
$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2}{e} < 1. \tag{26}$$
Appliquons le critere d' Alembert, on trouve que la serie de terme general $\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{(2n)^n}$ est convergente.

- Solution de 2). Posons
$$U_n = \left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n^2}. \tag{27}$$
Calculons $U_n^{\frac{1}{n}}$, on trouve
$$U_n^{\frac{1}{n}} = \left(\left(1-\frac{n+1}{n^2-4n+2}\right)^{\frac{n^2-4n+2}{n+1}}\right)^{\frac{n(n+1)}{n^2-4n+2}}. \tag{28}$$
Ceci nous donne
$$\lim_{n\to\infty}U_n^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{e} < 1. \tag{29}$$
Appliquons le critere de Cauchy, on trouve que la serie de terme general $\left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n^2}$ est convergente.

- Solution de 3). Posons
$$U_n = \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}. \tag{30}$$
Calculons $U_n^{\frac{1}{n}}$, on trouve
$$U_n^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{31}$$

Ceci nous donne

$$\lim_{n\to\infty} U_n^{\frac{1}{n}} = \frac{e}{2} > 1. \tag{32}$$

Appliquons le critere de Cauchy, on trouve que la serie de terme general $\dfrac{1}{2^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ est divergente.

- Solution de 4). Posons

$$U_n = \frac{n!}{2^n + 1}. \tag{33}$$

Calculons U_{n+1}:

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \frac{(n+1)!}{2^{n+1}+1} \\ &= \frac{(n+1)n!}{2^{n+1}+1} \\ &= \frac{n!}{2^n+1}\frac{(n+1)(2^n+1)}{2^{n+1}+1} \\ &= U_n\frac{(n+1)(2^n+1)}{2^{n+1}+1} \end{aligned} \tag{34}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} \frac{U_{n+1}}{U_n} &= \frac{(n+1)(2^n+1)}{2^{n+1}+1} \\ &= \frac{(n+1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}})}{1+\frac{1}{2^{n+1}}} \to +\infty, \quad \text{quand } n \to +\infty \end{aligned} \tag{35}$$

Appliquons le critere d' Alembert, on trouve que la serie de terme general $\dfrac{n!}{2^n+1}$ est divergente.

3. Théorèmes de Comparaison et d'equivalence.

- Solution de 1). Posons

$$U_n = \ln\frac{2+n^\alpha}{1+n^\alpha}. \tag{36}$$

On peut ecrire U_n sous la forme

$$U_n = \ln\left(1+\frac{1}{1+n^\alpha}\right). \tag{37}$$

En utilisant le fait que

$$\ln(1+x) \sim x, \quad \text{quand } x \sim 0, \tag{38}$$

ou $\sim$ designe l'equivalence, pour obtenir

$$U_n \sim \frac{1}{1+n^\alpha}, \quad \text{quand } n \sim +\infty. \tag{39}$$

D'un autre coté, $\dfrac{1}{1+n^\alpha} \sim \dfrac{1}{n^\alpha}$. Ceci avec (39) nous donne

$$U_n \sim \frac{1}{n^\alpha}, \quad \text{quand } n \sim +\infty. \tag{40}$$

C'est la serie de Riemann. La serie de terme general $\ln\dfrac{2+n^\alpha}{1+n^\alpha}$ est donc convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

- Solution de 2). Posons

$$U_n = \sqrt{\frac{n-1}{n^4+1}}. \tag{41}$$

On peut ecrire U_n sous la forme

$$U_n = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{n}}{n^3(1+\frac{1}{n^4})}}. \tag{42}$$

Donc

$$U_n \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{quand } n \sim +\infty. \tag{43}$$

C'est une serie de type Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$. La serie de terme general $\sqrt{\dfrac{n-1}{n^4+1}}$ est donc convergente.

- Solution de 3). Posons
$$U_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}. \tag{44}$$
On peut ecrire U_n sous la forme
$$\begin{aligned} U_n &= n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\ &= \exp\left(-\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln n\right) \\ &= \exp\left(-\ln n\right)\exp\left(-\frac{\ln n}{n}\right) \\ &= \exp\left(\ln\frac{1}{n}\right)\exp\left(-\frac{\ln n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\exp\left(-\frac{\ln n}{n}\right). \end{aligned} \tag{45}$$
Comme $\lim_{n\to\infty} \exp-\left(\frac{\ln n}{n}\right) = 1$, alors
$$U_n \sim \frac{1}{n}, \quad \text{quand } n \sim +\infty. \tag{46}$$
C'est une serie de type Riemann avec $\alpha = 1$. La serie de terme general $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ est donc divergente.

- Solution de 4). Posons
$$U_n = \frac{3^n - n^3}{5^n - 2^n}. \tag{47}$$
On peut ecrire U_n sous la forme
$$U_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n \frac{1-\frac{n^3}{3^n}}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}. \tag{48}$$
Comme $\lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{n^3}{3^n}}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n} = 1$, alors
$$U_n \sim \left(\frac{3}{5}\right)^n, \quad \text{quand } n \sim +\infty. \tag{49}$$
La serie de terme general $\left(\frac{3}{5}\right)^n$ est une serie ou les sommes partielles sont des sommes d'une suite geometrique de raison $\frac{3}{5} < 1$. Donc la serie de terme general $\frac{3^n - n^3}{5^n - 2^n}$ est convergente.

- Solution de 5). Posons
$$U_n = \sin^2\left(\pi\left(n+\frac{1}{n}\right)\right). \tag{50}$$
On peut ecrire U_n sous la forme
$$\begin{aligned} U_n &= \sin^2\left(\pi n + \frac{\pi}{n}\right) \\ &= \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned} \tag{51}$$
Nous avons, alors
$$U_n \sim \frac{\pi^2}{n^2}, \quad \text{quand } n \sim +\infty. \tag{52}$$
C'est une serie de type Riemann avec $\alpha = 2 > 1$. La serie de terme general $\sin^2\left(\pi\left(n+\frac{1}{n}\right)\right)$ est donc convergente.

4. Critere integral

   - Solution de 1). Posons $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ et remarquons que
   $$\frac{1}{n\ln n} = f(n).$$
   Remarquons que la fonction f definie sur $]2, \infty[$ verifie bien les conditions de Theoreme de comparaison avec une integrale, a savoir
     - f fonction continue positive

– f est decroissante car $x \mapsto x \ln x$ est croissante positive.

D'apres le Theoreme de comparaison avec une integrale, $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ et $\int_2^\infty f(x)dx$ ont la même nature. Or

$$\int_2^\infty f(x)dx = \ln(\ln x)\,|_0^\infty = +\infty. \tag{53}$$

Donc la serie de terme general $\frac{1}{n \ln n}$ est divergente.

- Solution de 2). Posons $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$ et remarquons que

$$\frac{1}{n \ln^2 n} = f(n).$$

Remarquons que la fonction f definie sur $]2, \infty[$ verifie bien les conditions de Theoreme de comparaison avec une integrale, a savoir

– f fonction continue positive

– f est decroissante car $x \mapsto x \ln^2 x$ est croissante positive.

D'apres le Theoreme de comparaison avec une integrale, $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^2 n}$ et $\int_2^\infty f(x)dx$ ont la même nature. Or, avec le changement de variable $\ln x = y$, on trouve que

$$\int_2^\infty f(x)dx = \int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{y^2}dy = -\frac{1}{y}|_{\ln 2}^\infty = \frac{1}{\ln 2}. \tag{54}$$

Donc la serie de terme general $\frac{1}{n \ln^2 n}$ est convergente.

Exercice 3. Montrer que la serie de Bertrand $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Solution

Distinguons les cas suivants:

1. Si $\alpha < 0$ ou ($\alpha = 0$ et $\beta \leq 0$), on a $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = +\infty$ si $\alpha < 0$ ou ($\alpha = 0$ et $\beta < 0$) et vaut 1 si $\alpha = \beta = 0$. Qui sont differentes de zero. La condition necessaire de convergence est donc n'est pas verifiee. La serie $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ est donc divergente dans ce cas la.

2. Si $\alpha > 0$ ou ($\alpha = 0$ et $\beta > 0$). Considerons la fonction $f(x) = \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$. La fonction f est une fonction continue positive decroissante. Donc la serie de terme general $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ et l'integrale $\int_2^\infty f(x)dx$ ont la même nature. On fait le changement de varibla $\ln x = y$, on trouve que $\int_2^\infty f(x)dx = \int_{\ln 2}^\infty G(y)dy$ avec

$$G(y) = e^{(1-\alpha)y} y^{-\beta}.$$

   (a) Si $\alpha > 1$ (donc $1 - \alpha < 0$). On peut ecrire

$$G(y) = e^{(1-\alpha)y} y^{-\beta} = e^{\frac{(1-\alpha)y}{2}} e^{\frac{(1-\alpha)y}{2}} y^{-\beta}.$$

   Comme (car $1 - \alpha < 0$)

$$\lim_{y \to +\infty} e^{\frac{(1-\alpha)y}{2}} y^{-\beta} = 0.$$

   Alors $e^{\frac{(1-\alpha)y}{2}} y^{-\beta}$ est bornee sur $[0, +\infty)$. Soit M tel que $e^{\frac{(1-\alpha)y}{2}} y^{-\beta} \leq M, \ \forall y \geq 0$. Ceci nous la majoration suivante

$$G(y) \leq M e^{\frac{(1-\alpha)y}{2}}.$$

   D'un autre coté $\int_{\ln 2}^\infty e^{\frac{(1-\alpha)y}{2}} dy$ est convergente. Donc $\int_2^\infty f(x)dx = \int_{\ln 2}^\infty G(y)dy$ est convergente. La serie de terme general $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ est donc convergente pour $\alpha > 1$.

(b) Si $0 < \alpha < 1$ (donc $1-\alpha > 0$). On trouve que $\lim_{y\to+\infty} G(y) = +\infty$. Donc $\int_2^{\infty} f(x)dx = \int_{\ln 2}^{\infty} G(y)dy$ est divergente.

(c) Si $\alpha = 1$. On a

$$\int_2^{\infty} f(x)dx = \int_{\ln 2}^{\infty} G(y)dy = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{y^{\beta}} dy.$$

Comme $\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{y^{\beta}} dy = \ln y|_{\ln 2}^{\infty}$ si $\beta = 1$ et $\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{y^{\beta}} dy = \frac{y^{1-\beta}}{1-\beta}|_{\ln 2}^{\infty}$, alors cette integrale est convergente si et seulement si $\beta > 1$.

Exercice 4. Etudier la convergence, semi-convergence, et convergence absolue des series suivantes dont le terme general est:

1. $$\frac{(-1)^n}{\ln n}. \tag{55}$$

2. $$(-1)^n \sin\frac{1}{n}. \tag{56}$$

3. $$(-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}. \tag{57}$$

4. $$\sin\left(\frac{\pi\, n^2}{n+1}\right). \tag{58}$$

Solution

1. Solution de 1.

   (a) Convergence. On utilise le critere qui concerne les series alternées. Comme la suite $\frac{1}{\ln n}$ est positive et decroit vers zero, alors la serie de terme general $\frac{(-1)^n}{\ln n}$ est convergente.

   (b) Convergence Absolue. On a $\left|\frac{(-1)^n}{\ln n}\right| = \frac{1}{\ln n}$ est un serie de type Bertrand avec $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. La serie de terme general $\frac{1}{\ln n}$ est donc divergente. Donc la serie de terme general $\frac{(-1)^n}{\ln n}$ n'est pas absolument convergente.

   (c) Semi-Convergence. Comme la serie de terme general $\frac{(-1)^n}{\ln n}$ est convergente et n'est pas absolument convergente alors la serie de terme general $\frac{(-1)^n}{\ln n}$ est semi-convergente.

2. Solution de 2.

   (a) Convergence. On utilise le critere qui concerne les series alternées. Comme la suite $\sin\frac{1}{n}$ est positive (car $0 < \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$, pour tout $n \geq 1$) et decroit vers zero, alors la serie de terme general $(-1)^n \sin\frac{1}{n}$ est convergente.

   (b) Convergence Absolue. On a $\left|(-1)^n \sin\frac{1}{n}\right| = \sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ est un serie de type Riemann avec $\alpha = 1$. La serie de terme general $\sin\frac{1}{n}$ est donc divergente. Donc la serie de terme general $(-1)^n \sin\frac{1}{n}$ n'est pas absolument convergente.

   (c) Semi-Convergence. Comme la serie de terme general $(-1)^n \sin\frac{1}{n}$ est convergente et n'est pas absolument convergente alors la serie de terme general $(-1)^n \sin\frac{1}{n}$ est semi-convergente.

3. Solution de 3.

   (a) Convergence. On utilise le critere qui concerne les series alternées. Une etude de variation de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ montre que la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ est decroissante pour $x \geq e^2$. Donc la suite positive $\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ decroit vers zero pour $n \geq 9 > e^2$, alors la serie de terme general $(-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ est convergente.

(b) Convergence Absolue. On a $\left|(-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}} \ln^{-1} n}$ est un serie de type Bertrand avec $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = -1$. La serie de terme general $\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ est donc divergente. Donc la serie de terme general $(-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ n'est pas absolument convergente.

(c) Semi-Convergence. Comme la serie de terme general $(-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ est convergente et n'est pas absolument convergente alors la serie de terme general $(-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ est semi-convergente.

4. Solution de 4.
Remarquons que, a travers de la division de n^2 sur $n+1$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) &= \sin\left(\pi\left(n-1+\frac{1}{n+1}\right)\right) \\ &= (-1)^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \\ &= (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right). \end{aligned} \tag{59}$$

C'est la même serie de l'item 2 (serie (56)).

Exercice 5. Etudier les series suivantes dont le terme general est:

$$\frac{\sqrt{n}}{n^4+1}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}, \quad \frac{3^n + 7^{2n}}{\ln^2 n + 8^{2n} + n^3}, \quad \frac{\lambda^n}{\lambda^{2n} + \lambda^n + 1}(\lambda > 0), \quad \frac{2^n}{n^2}(\sin\alpha)^{2n}. \tag{60}$$

Solution

1. Terme General $\frac{\sqrt{n}}{n^4+1}$. Remarquons que

$$\frac{\sqrt{n}}{n^4+1} \sim \frac{\sqrt{n}}{n^4} = \frac{1}{n^{\frac{7}{2}}}. \tag{61}$$

Est un serie de type Riemann avec $\alpha = \frac{7}{2} > 1$. La serie de terme general $\frac{\sqrt{n}}{n^4+1}$ est donc convergente grace a l'application du Theoreme d'equivalence.

2. Terme General $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$. Remarquons que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x \ln 2}{4 \ln x} = +\infty \tag{62}$$

Ceci implique en particulier qu'il existe un $A > 0$ tel que

$$\frac{x \ln 2}{4 \ln x} > 1, \quad \forall x \in [A, \infty). \tag{63}$$

Ceci nous donne

$$\ln 2^x > \ln x^4, \quad \forall x \in [A, \infty). \tag{64}$$

Donc

$$2^x > x^4, \quad \forall x \in [A, \infty). \tag{65}$$

Pronons en particulier $x = \sqrt{n}$ dans (65) pour n suffisamment grand, on trouve que

$$2^{\sqrt{n}} > n^2. \tag{66}$$

Ceci nous donne

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}} = \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} < \frac{1}{n^2}. \tag{67}$$

Comme la serie de terme general $\frac{1}{n^2}$ est la serie de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$, alors la serie de terme general $\frac{1}{n^2}$ est convergente. Ceci avec (67) et la regle de comparaison assure la convergence de serie de terme general $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$.

3. Terme General $\frac{3^n + 7^{2n}}{\ln^2 n + 8^{2n} + n^3}$. Nous avons

$$\frac{3^n + 7^{2n}}{\ln^2 n + 8^{2n} + n^3} \sim \frac{7^{2n}}{8^{2n}} = \left(\frac{49}{64}\right)^n. \tag{68}$$

Le terme general $\frac{3^n + 7^{2n}}{\ln^2 n + 8^{2n} + n^3}$ est equivalent a une suite gemoetrique de raison $\frac{49}{64} < 1$. Theoreme d'quivalence nous assure alore la convergence de la serie de terme general $\frac{3^n + 7^{2n}}{\ln^2 n + 8^{2n} + n^3}$.

4. Terme General $\dfrac{\lambda^n}{\lambda^{2n}+\lambda^n+1}(\lambda>0)$:

   - Si $\lambda=1$: le terme general tend vers $\dfrac{1}{3}$. La condition necessaire de convergence n'est pas satisfaite. La serie diverge.
   - Si $\lambda>1$:
   $$\frac{\lambda^n}{\lambda^{2n}+\lambda^n+1}\sim\frac{\lambda^n}{\lambda^{2n}}=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n. \tag{69}$$
   Le terme general $\dfrac{\lambda^n}{\lambda^{2n}+\lambda^n+1}$ est equivalent a une suite gemoetrique de raison $\frac{1}{\lambda}<1$. Theoreme d'quivalence nous assure alore la convergence de la serie de terme general $\dfrac{\lambda^n}{\lambda^{2n}+\lambda^n+1}$.
   - Si $0<\lambda<1$:
   $$\frac{\lambda^n}{\lambda^{2n}+\lambda^n+1}\sim\lambda^n. \tag{70}$$
   Le terme general $\dfrac{\lambda^n}{\lambda^{2n}+\lambda^n+1}$ est equivalent a une suite gemoetrique de raison $\lambda<1$. Theoreme d'quivalence nous assure alore la convergence de la serie de terme general $\dfrac{\lambda^n}{\lambda^{2n}+\lambda^n+1}$.

5. Terme General $\dfrac{2^n}{n^2}(\sin\alpha)^{2n}$. Remarquons que
   $$\begin{aligned}\frac{2^n}{n^2}(\sin\alpha)^{2n} &= \frac{2^n}{n^2}\left(\sin^2\alpha\right)^n\\ &= \frac{\left(2\sin^2\alpha\right)^n}{n^2}. \end{aligned}\tag{71}$$
   Posons $U_n=\dfrac{2^n}{n^2}(\sin\alpha)^{2n}=\dfrac{\left(2\sin^2\alpha\right)^n}{n^2}$ et calculons $U^{\frac{1}{n}}$
   $$U^{\frac{1}{n}}=\frac{2\sin^2\alpha}{n^{\frac{2}{n}}}. \tag{72}$$
   Dou la limite
   $$\lim_{n\to\infty}U^{\frac{1}{n}}=2\sin^2\alpha. \tag{73}$$
   On distingue les cas suivants:

   - Si $2\sin^2\alpha<1$: La serie converge.
   - Si $2\sin^2\alpha>1$: La serie diverge.
   - Si $2\sin^2\alpha=1$: On trouve (grace a (71)) $U_n=\dfrac{1}{n^2}$. C'est une serie de Riemann avec $\alpha=2>1$ qui est convergente.