University of Annaba–"Ecole Preparatoire aux Sciences et Techniques"
Second year undergraduation **2010–2011**

Suites et series de fonctions

Convergence simple et uniformes

Exercice 1. (Vrai et Faux)
Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers f sur intervalle $I = [a, b]$. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses:

1. Si (f_n) sont croissantes, alors f aussi.
2. Si (f_n) sont strictement croissantes, alors f aussi.
3. Si (f_n) sont periodiques, alors f aussi.
4. Si (f_n) sont continues en un point $x_0 \in I$, alors f aussi.

Solution

1. Faux: considerons $f_n = \dfrac{-nx}{1+nx}$, $x \in [0, 1]$ et $n \geq 1$. Donc $f(0) = 0$ et $f(x) = -1$ pour $x \in (0, 1]$.
2. Faux: voir l'exemple precedent.
3. Faux: considerons f_n, $n \geq 2$, definie sur $[0, 1]$ et de periode $1 - (1/n)$ par $f_n(x) = x$ pour $x \in [0, 1 - (1/n))$. On peut demontrer que f_n converge simplement vers la fonction definee sur $[0, 1]$ par $f(x) = x$. On remarque que f n'est pas periodique. Si f_n sont periodiques avec periode fixe T on peut demontrer que f et aussi. Sur $\mathbb{R}$, on peut considerer egalement la fonction periodique de periode n definie par $f_n(x) = x$, pour $x \in [0, n)$. On peut justifier que f_n converge simplement vers la fonction non periodique $f(x) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Faux: voir premier item.

Exercice 2. (Convergence simple et uniforme)
Etudier la convergence simple et uniforme des suites des fonctions suivantes:

1. $f_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ sur $]-1, 1[$ puis sur $]-a, a[$ avec $0 \leq a < 1$
2. $f_n = nx^n \ln(x)$, $f_n(0) = 0$ sur $[0, 1]$.
3. $f_n = \exp(-nx)\sin(2nx)$ sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a, +\infty)$ avec $a > 0$.

Solution

1. On remarque f_n est la somme d'une suite geometrique de raison x et par consequent $f_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$. On obtient apres limite que f_n converge simplement vers $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$.
   (a) Cette convergence n'est pas uniforme. En effet, soit $x_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ et faisons
$$f_n(x_n) - f(x_n) = (n+1)(1 - (1 - \frac{1}{n+1})^{n+1}) - (n+1) \to \infty, \text{ lorsque } n \to \infty. \tag{1}$$

(b) Cette convergence est uniforme sur $[-a, a]$ avec $0 \leq a < 1$. En effet

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x}| \\ &= \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \\ &\leq \frac{a^{n+1}}{1-a}, \ \forall x \in [-a, a]. \end{aligned} \tag{2}$$

Ce qui implique que

$$\sup_{x \in [-a,a]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{a^{n+1}}{1-a} \to \ 0, \text{ lorsque } n \to \infty \tag{3}$$

2. f_n definie par $f_n = nx^n \ln(x)$, $f_n(0) = 0$ sur $[0, 1]$ converge simplement vers $f(x) = 0$, pour tout $x \in [0, 1)$ (car $nx^n \to 0$ pour tout $x \in (0, 1)$) . Comme $f_n(1) = 0$, on deduit que f_n converge simplement vers $f(x) = 0$, pour tout $x \in [0, 1]$.

   (a) Cette convergence n'est pas unifome: prenons $x_n = 1 - 1/n$ et remarquons que

$$f_n(x) - f(x) = -(1 - 1/n)^n \frac{\ln(1 - 1/n)}{\frac{-1}{n}} \to -\exp(-1) \tag{4}$$

   (b) Cette convergence est uniforme sur tout intervalle $[0, a]$ avec $0 < a < 1$: why?

3. Remarquons que $f_n = \exp(-nx) \sin(2nx)$ converge simplement vers $f(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}^+_\star$ (car la fonction sin est bornee). Comme $f_n(0) = 0$, alors f_n converge simplement vers $f(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

   (a) Cette convergence n'est pas unifome: prenons $x_n = \pi/4n$ et remarquons que

$$f_n(x) - f(x) = \exp(-\pi/4). \tag{5}$$

   (b) Cette convergence est uniforme sur tout intervalle $[a, +\infty)$ avec $0 < a$: car, en utlisant le fait que la fonction sin est bornee

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |\exp(-nx) \sin(2nx)| \\ &\leq \exp(-na), \ \forall x \in [a, +\infty). \end{aligned} \tag{6}$$

   Ce qui implique que

$$\sup_{x \in [a,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| \leq \exp(-na) \to \ 0, \text{ lorsque } n \to \infty. \tag{7}$$

Exercice 3. (Fonction Expo)
Montrer que $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$ converge uniformement vers $\exp(x)$ sur tout intervalle $[a, b]$.

Solution Let λ be such that $0 < \lambda < 1$. One konow that there exists n_0 such that $\frac{1}{n}[a, b] \subset [-\lambda, \lambda]$, for all $n \geq n_0$ (this stems from the fact that a/n and b/n are tending to zero as n tends to infinity), one can apply the mean value Theorem on $(x, 0)$ for $n \geq n_0$ to obtain

$$\begin{aligned} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) &= \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \log(1 + 0) \\ &= \frac{x}{n + \chi_n(x)}, \end{aligned} \tag{8}$$

where $\chi_n(x)$ lies between 0 et x and $x \in [a,b]$.
This implies that (note that $x\chi_n(x) \geq 0$), for $n \geq n_0$ (this implies in particular that $n+a>0$, since $a/n_0 > -1$)

$$\begin{aligned}
\left|(1+\frac{x}{n})^n - \exp(x)\right| &= \left|\exp\left(n\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) - \exp(x)\right| \\
&= \exp(x)\left|\exp\left(\frac{x\chi_n(x)}{n+\chi_n(x)}\right) - 1\right| \\
&\leq \exp(b)\left(\exp\left(\frac{M^2}{n+a}\right) - 1\right). \qquad (9)
\end{aligned}$$

where $M = \max(|a|, |b|)$.
Inequality (9) implies that

$$\sup_{x\in[a,b]} \left|(1+\frac{x}{n})^n - \exp(x)\right| \leq \exp(b)\left(\exp\left(\frac{M^2}{n+a}\right) - 1\right) \to 0, \text{ as } n \to +\infty. \qquad (10)$$

Remark: We can also apply the Dini's Theorem states that if $\mathbb{X}$ is a compact topological space, and f_n is a monotonically increasing sequence (meaning $f_n(x) f_{n+1}(x)$ for all n and x) of continuous real-valued functions on $\mathbb{X}$ which converges pointwise to a continuous function f, then the convergence is uniform. An analogous statement holds if f_n is monotonically decreasing. Indeed, $\mathbb{X} = [a,b]$ is compact and $(1+\dfrac{x}{n+1})^{n+1} \geq (1+\dfrac{x}{n})^n$, for all x and for sufficiently large n (to prove this motonocity, we can consider the derivative of the function $y \to (1+\frac{x}{y})^y$). In addition to this $(1+\dfrac{x}{n})^n$ converges pointwise to $\exp(x)$.

Exercice 4. (Convergence simple et uniforme d'une serie)
Soit f_n definie par:

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\tan(\frac{x}{2^k}),\ x \in]-\pi,\pi[. \qquad (11)$$

1. Montrer que f_n convergence simplement
2. Trouver la limite (utiliser $\tan(\frac{y}{2}) = \cot(\frac{y}{2}) - 2\cot(y)$.
3. Etudier la convergence uniforme.

Solution:

1. Soit $p > q \geq 1$ deux nombres entiers.Nous avons, pour tout $x \in [0,\pi[$

$$\begin{aligned}
|f_p(x) - f_q(x)| &= \sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{2^k}\tan(\frac{x}{2^k}) \\
&\leq \tan(\frac{x}{2^{q+1}}) \sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{2^k} \to 0,\ \text{lorsque } q \to +\infty. \qquad (12)
\end{aligned}$$

   Ce qui entraine que $f_n(x)$ est une suite de Cauchy et donc convergente vers une limite f(x). Pour $x \in (-\pi, 0]$, on remarque que $f_n(x) = -f_n(-x)$ (f_n est impaire) et par consequent $f_n(x)$ converge vers $-f(-x)$ (qui existe deja d'apres le raisonnement precedent).

2. Pour $x \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^k}\tan(\frac{x}{2^k}) &= \frac{1}{2^k}\left(\cot(\frac{x}{2^k}) - 2\cot(\frac{x}{2^{k-1}})\right) \\
&= \frac{1}{2^k}\cot(\frac{x}{2^k}) - \frac{1}{2^{k-1}}\cot(\frac{x}{2^{k-1}}). \qquad (13)
\end{aligned}$$

   Ceci implique que, pour $x \neq 0$

$$f_n(x) = \frac{1}{2^n}\cot(\frac{x}{2^n}) - \cot(x). \qquad (14)$$

On fait la limite pour trouver que f_n converge simplement vers f definie par

$$f(x) = \frac{1}{x} - \cot(x),\ \forall\, x \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\}. \tag{15}$$

Pour le cas, remarquons que $f_n(0) = 0$, ceci nous donne

$$f(0) = 0. \tag{16}$$

Il est utile de noter que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Ceci implique que f est continue sur $]-\pi, \pi[$.

3. Considerons

$$\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2^n}\cot(\frac{x}{2^n}),\ \forall\, x \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\}, \tag{17}$$

et

$$\varphi_n(0) = f(0) - f_n(0) = 0. \tag{18}$$

Calculons la derivee de φ pour trouver

$$\varphi_n(x) = \frac{-\sin^2(\frac{x}{2^n}) + (\frac{x}{2^n})^2}{x^2 \sin^2(\frac{x}{2^n})} \geq\ 0. \tag{19}$$

Ceci implique que φ_n est croissante. Comme φ_n est continue et impaire et verifie $\varphi_n(0) = 0$, alors pour tout $a > 0$

$$\sup_{x\in[-a,a]} |\varphi_n| \leq \varphi_n(a) \to\ 0. \tag{20}$$

Nous avons alors la convergence uniforme sur tout intervalle $[-a, a]$.