Ecole Préparatoire aux Sciences et Techniques (EPST)–Annaba
Module Analyse II
2015–2016

Solution de la Série 7 des Intégrales Génélisées

Exercice 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}. \tag{1}$$

1. Trouver la l limite de la suite I_n
2. Donner une equivalent de $l - I_n$.
3. Justifier l'egalité
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}. \tag{2}$$
4. Trouver la somme de cete serie sachant que
$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{3}$$

Solution de l'Exercice

1. Pour calculer la limite l, on propose deux methodes differentes : l'une est basée sur l'utilisation de **Theoreme de convergence dominée (TCD)-Support de Cours, Page 25** avec condition de convergence uniforme locale (existe une version plus generale en utilisant la notion de convergence presque partout) et l'autre est basée sur une technique d'analyse de base.

   (a) First method (TCD): Considerons la suite de fonction f_n definie par
   $$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}, \quad x \in [0,1].$$
   On verifie les hypothese de **TCD**:
   - Convergence uniforme locale. On prouve que f_n convergence uniformement localement sur $[0,1[$ vers la fonction f definie par $f(x) = 1$ pour tout $x \in [0,1[$. Soit $[0,\alpha] \subset [0,1[$ et jutifions la convergence uniforme (CU) sur $[0,\alpha]$. Nous avons
   $$\sup_{x\in[0,\alpha]} |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha^n \to 0, \quad n \to +\infty.$$
   - f_n bornee par fonction g uniformement par rapport a n
   $$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \forall x \in (0,1).$$
   avec $g \equiv 1$ qui verifie
   $$\int_0^1 g(x)dx = 1 < \infty.$$

   On alore
   $$\lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 dx = 1. \tag{4}$$
   Donc
   $$l = 1.$$

(b) Second method: Il suffit d'utliser le fait que

$$1-x^n \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1, \quad \forall x \in (0,1).$$

Donc

$$1-\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1.$$

Tendons n vers $+\infty$, on trouve $l=1$.

2. Equivalence $1-I_n$. Nous avans

$$1-I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx. \tag{5}$$

Avec un changement de variable $t=x^n$, on trouve que

$$1-I_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{n}}}{1+t}dt. \tag{6}$$

On utlise **TCD**, on trouve que (remarquant que $t^{\frac{1}{n}}$ convergence uniformement localement sur $]0,1]$ vers la fonction 1)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{n}}}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t}dt = \ln(2). \tag{7}$$

Par consequent

$$1-I_n \sim \frac{\ln(2)}{n}. \tag{8}$$

3. Considerons la fonction continue suivante:

$$\varphi(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}, \;\; 0 < x \leq 1, \tag{9}$$

et

$$\varphi(0)=1. \tag{10}$$

La fonction φ est developable en serie entiere au point $x_0=0$

$$\varphi(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n, \quad 0 \leq x < 1. \tag{11}$$

Considerons la serie (somme partielle)

$$\varphi_n(x) = \sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m+1}x^m.$$

Comme φ_n convergence uniformement localement, i.e. φ_n converge uniformement vers φ sur tout $[0,\alpha]\subset[0,1[$. De plus, pour tout $0<x<1$

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x)| &= \frac{1}{x}\left|\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m+1}x^{m+1}\right| \\ &\leq \frac{1}{x}\sum_{m=0}^{n}\frac{x^{m+1}}{m+1} \\ &= \frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{m=0}^{n}t^m\right)dt \\ &\leq \frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1-t}dt \end{aligned} \tag{12}$$

Donc

$$|\varphi_n(x)| \leq -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

La fonction $-\frac{\ln(1-x)}{x}$ est prolongeable par continuite en 0 (la valeur en 0 vaut 1). La suite de fonctions $|\varphi_n|$ est borne uniformement par rapport n sur $[0,1]$. On peut alors appliquer **TCD** pour avoir

$$\begin{aligned} \int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx &= \int_0^1\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1\varphi_n(x)dx \\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}. \end{aligned} \tag{13}$$

4. Nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2} &= \sum_{n \text{ est paire}}\frac{1}{(n+1)^2}-\sum_{n \text{ est impaire}}\frac{1}{(n+1)^2}\\ &= T-\frac{1}{4}S \qquad (14)\end{aligned}$$

avec

$$T=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

et

$$S=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Il reste a calculer T. Pour cette raison, on ecrit

$$\begin{aligned}S=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)^2} &= \sum_{n \text{ est paire}}\frac{1}{(n+1)^2}+\sum_{n \text{ est impaire}}\frac{1}{(n+1)^2}\\ &= T+\frac{1}{4}S. \qquad (15)\end{aligned}$$

D'ou

$$T=S-\frac{1}{4}S=\frac{3}{4}S$$

On alors

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=T-\frac{1}{4}S=\frac{3}{4}S-\frac{1}{4}S=\frac{1}{2}S=\frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 2. Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction integrable sur tout intervalle $[a,b]\subset\mathbb{R}_+$, continue en 0 et telle que $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ soit convergente.

1. Montrer que l'integrale suivante est convergente

$$I(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{f(\beta x)-f(\alpha x)}{x}dx, \qquad (16)$$

pour tout $0<\beta<\alpha$.

2. Calculer $I(\alpha,\beta)$.

Solution de l'Exercice

1. Avec changement de variables convenables ($\beta x=t$ et $\alpha x=t$), on trouve

$$\begin{aligned}\int_m^M\frac{f(\beta x)-f(\alpha x)}{x}dx &= \int_m^M\frac{f(\beta x)}{x}dx-\int_m^M\frac{f(\alpha x)}{x}dx\\ &= \int_{\beta m}^{\beta M}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{\alpha m}^{\alpha M}\frac{f(t)}{t}dt\\ &= \int_{\beta m}^{\alpha m}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{\beta M}^{\alpha M}\frac{f(t)}{t}dt. \qquad (17)\end{aligned}$$

La derniere integrale tend vers 0, quand $M\to+\infty$, car $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ est convergente.
Comme f est continue en 0 alors, pour tout $\epsilon>0$, existe η tel que, pour tout $t\in(0,\eta)$, on a

$$|f(t)-f(0)|<\epsilon. \qquad (18)$$

Ceci implique que, pour $\alpha m<\eta$

$$\left|\int_{\beta m}^{\alpha m}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{\beta m}^{\alpha m}\frac{f(0)}{t}dt\right|<\epsilon\int_{\beta m}^{\alpha m}\frac{dt}{t}=\epsilon\ln\frac{\alpha}{\beta}. \qquad (19)$$

Comme $\int_{\beta m}^{\alpha m}\frac{f(0)}{t}dt=f(0)\ln\frac{\alpha}{\beta}$, la derniere proposition nous donne, pour $m<\frac{\eta}{\alpha}$

$$\left|\int_{\beta m}^{\alpha m}\frac{f(t)}{t}dt-f(0)\ln\frac{\alpha}{\beta}\right|<\epsilon\int_{\beta m}^{\alpha m}\frac{dt}{t}=\epsilon\ln\frac{\alpha}{\beta}. \qquad (20)$$

Faisons $m \to 0$ et $M \to +\infty$ dans (17) et utilisons (20), on trouve

$$I(\alpha, \beta) = f(0) \ln \frac{\alpha}{\beta}. \tag{21}$$

Par exemple, pour $f(x) = \exp(-x)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-\beta x) - \exp(-\alpha x)}{x} dx = \ln \frac{\alpha}{\beta}. \tag{22}$$

Exercice 3.

1. En utilisant, le Theoreme d'Abel, prouver que les integrales suivantes sont convergentes

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt, \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t} dt. \tag{23}$$

2. En deduire la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t} + \cos t} dt. \tag{24}$$

Solution de l'Exercice

1. Les singularités (ou la fonction sous integrale n'est pas definie) sont $t = 0$ et $t = +\infty$. En decompose les integrales sous la forme $\int_0^1 + \int_1^\infty$. Les integrales $\int_0^1$ sont convergentes en utlisant ou bien la comparaison, l'equivalence, ou les fait que les fontions sont prolongeable par continuité en 0. Les integrales $\int_1^\infty$ sont convergentes grace a une application du Theoreme d'Abel, **voir Support de cours-Pages 19–23**.

2. Tout d'abort, on remarque que $\sqrt{t} + \cos t \neq 0$ pour tout $t \geq 0$. Si non, $\sqrt{t} = -\cos t \leq 1$ donc $0 \leq t \leq 1 < \frac{\pi}{2}$. Comme $\cos t > 0$ et $\sqrt{t} \geq 0$ pour tout $0 \leq t \leq 1$, alors $\sqrt{t} + \cos t > 0$; contradiction. **La seule singularité alors figure au point $t = +\infty$**. On remarque de plus que

$$\frac{1}{\sqrt{t} + \cos t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \left(1 - \frac{\cos t}{\sqrt{t}} + \frac{\cos^2 t}{t\left(1 + \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right)} \right) \tag{25}$$

Donc,

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t} + \cos t} dt = \int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt - \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{\sin 2t}{t} dt + \int_1^\infty \frac{\sin t \cos^2 t}{t^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right)} dt \tag{26}$$

Les deux premieres integrales sont convergentes d'apres la question 1. Pour le troisieme integrale, nous avons

$$\left| \frac{\sin t \cos^2 t}{t^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right)} \right| \leq \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\left|1 + \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right|} \sim \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \tag{27}$$

Comme $\int_1^\infty \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ est convergente, alors la troisieme integrale qui figure dans le deuxieme membre de (26) est absolument convergente et donc convergente. Ceci donne alors la convergence de l'integrale demandée $\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t} + \cos t} dt$