DYNAMIQUE DE L'ACTION DU GROUPE MODULAIRE ET TRIPLETS DE MARKOV

FRÉDÉRIC PALESI

Résumé. Soit S une surface compacte avec $\chi(S) \leq -1$. Nous nous intéressons ici à l'action du groupe modulaire de la surface S sur les variétés de caractères $\mathcal{X}(\pi_1(S), \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))$, lorsque S est un tore à un trou ou une sphère à quatre trous. Le but de cet article est de présenter un objet combinatoire appelé Application de Markov qui nous permet de définir un domaine de discontinuité ouvert pour l'action du groupe modulaire. L'intersection de ce domaine avec l'ensemble des caractères réels permet de retrouver certains résultats obtenus par Goldman dans le cas du tore à un trou et de montrer certains comportements nouveaux dans le cas de la sphère à quatre trous.

1. Introduction

Soit S une surface compacte avec $\chi(S) \leq 1$. L'espace de Teichmüller de S, noté $\mathrm{Teich}(S)$, est l'ensemble des structures hyperboliques marquées complètes sur S modulo isotopie. Le groupe modulaire $\mathrm{Mod}(S)$ est le groupe des classes d'isotopie d'homéomorphismes de S. Un théorème classique de Fricke-Klein (voir [4]) établit que le groupe modulaire agit sur $\mathrm{Teich}(S)$ de façon proprement discontinue.

On peut étendre cette action dans un contexte plus général. Soit $\pi = \pi_1(S)$ le groupe fondamental de la surface S, et $G = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2) = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ le groupe des isométries directes du plan hyperbolique. La classe de conjugaison de la représentation d'holonomie d'une structure hyperbolique donne une application :

$$\mathrm{hol} : \mathrm{Teich}(S) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi, G)/G = \mathcal{X}(\pi, G)$$

Cette application plonge $\mathrm{Teich}(S)$ dans la variété de caractères $\mathcal{X}(\pi, G)$, comme une composante connexe.

D'autre part, le théorème de Dehn-Nielsen-Baer (voir [3]) donne un isomorphisme entre le groupe modulaire $\mathrm{Mod}(S)$ et le groupe $\mathrm{Out}(\pi)$ des automorphismes extérieurs de π. On rappelle que $\mathrm{Out}(\pi)$ est le quotient de $\mathrm{Aut}(\pi)$ par le sous-groupe des automorphismes intérieurs. Le groupe $\mathrm{Out}(\pi)$ agit naturellement sur $\mathcal{X}(\pi, G)$ par précomposition, c'est à dire que si $\tau \in \mathrm{Aut}(\pi)$ et $\rho : \pi \to G$, on a

$$[\tau] \cdot [\rho] := [\rho \circ \tau^{-1}]$$

1.1. **Dynamique.** Un des problèmes principaux qui nous intéresse ici est de comprendre la dynamique de l'action de $\mathrm{Out}(\pi)$ sur tout l'espace $\mathcal{X}(\pi, \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ et non plus seulement sur $\mathrm{Teich}(S)$. La topologie de cet espace est bien connue depuis les travaux de Goldman [6] qui montrent que si S est une surface fermée de genre $g \geq 2$ alors l'espace $\mathcal{X}(\pi, \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ possède $4g-3$ composantes connexes indexées par la classe d'Euler de la représentation. De

Cet article a été écrit pendant que l'auteur était en séjour au MSRI avec le support partiel de l'European Research Council (FP7/2007-2013)/ERC grant agreement FP7-246918, et également de l'ANR VALET (ANR-13-JS01-0010).

plus les composantes de classes d'Euler extrémales correspondent à l'espace de Teichmüller Teich(S) (et à l'espace de Teichmüller de la surface avec l'orientation inverse). Des résultats similaires sur la topologie de $\mathcal{X}(\pi, G)$ ont été donnée par la suite pour $G = \mathrm{PGL}(2, \mathbf{R})$ par Xia [23] et l'auteur [16, 18].

La dynamique sur les composantes extrémales est bien comprise puisqu'elle correspond à l'action proprement discontinue sur l'espace de Teichüller. L'action sur les autres composantes connexes est beaucoup plus mystérieuse, et Goldman propose la conjecture suivante (voir [5]) :

Conjecture 1.1. *Soit S une surface fermée de genre $g \geq 2$. L'action de* $\mathrm{Mod}(S)$ *sur* $\mathcal{X}(\pi, \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ *est ergodique sur chaque composante connexe non-extrémale.*

La conjecture a été montrée dans le cas du genre $g = 2$ par Marché-Wolff [13]. Plus précisément, ils montrent que l'action est ergodique sur les composantes connexes de classe d'Euler ± 1, et ils montrent que la composante de classe d'Euler 0 est l'union disjointe de deux sous-ensembles invariants sur lesquels l'action est ergodique. Récemment J. Souto a annoncé une preuve de l'ergodicité pour les composantes de classe d'Euler 0, en genre $g > 2$, mais le cas général de la conjecture reste ouvert.

Une méthode simple pour approcher ce genre de questions est de découper la surface en pantalons et de comprendre l'action du groupe modulaire sur les sous-surfaces (à bord) issue de cette décomposition. Cette méthode est celle utilisée par Goldman [7] et l'auteur [17] pour montrer que $\mathrm{Mod}(S)$ agit ergodiquement sur la variété de caractères $\mathcal{X}(\pi_1(S), \mathrm{SU}(2))$ lorsque S est une surface fermée (orientable ou non) de caractéristique $\chi(S) \leq -2$.

On peut noter que les variétés de caractères dans $\mathrm{SU}(2)$ et $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ peuvent se voir comme des sous-ensemble de la variété de caractères dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Lorsque $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, l'ensemble $\mathrm{QF}(S)$ des classes de représentations qui correspondent à des plongements de π dans un groupe quasi-fuchsien de G est ouvert et $\mathrm{Mod}(S)$-invariant. De plus, le théorème de double uniformisation de Bers fournit un biholomorphisme $\mathrm{Mod}(S)$-invariant :

$$\mathrm{QF}(S) \longrightarrow \mathcal{T}(S) \times \mathcal{T}(\bar{S})$$

Le groupe modulaire agit donc sur $\mathrm{QF}(S)$ de façon proprement discontinue. Par contre, l'action sur le complémentaire de $\mathrm{QF}(S)$ semble elle aussi chaotique et Goldman propose également la conjecture suivante, qui reste largement ouverte :

Conjecture 1.2. *Soit S une surface fermée de genre $g \geq 2$. L'action de* $\mathrm{Mod}(S)$ *sur le complémentaire de* $\mathrm{QF}(S)$ *est ergodique.*

1.2. **Surfaces à bord.** Soit S une surface orientable de genre g avec $n \geq 1$ composantes de bord (c'est à dire qu'on a retiré n disques ouverts à une surface de genre g), de sorte que $\chi(S) \leq -1$. Dans ce cas, le groupe fondamental est isomorphe au groupe libre en $N = 2g-1+n$ générateurs. Le groupe modulaire est le groupe des classes d'isotopie d'homéomorphismes de S qui sont l'identité sur ∂S. Le théorème De Dehn-Nielsen-Baer montre qu'alors $\mathrm{Mod}(S)$ est isomorphe au sous groupe de $\mathrm{Out}(\pi_1(S))$ qui agit trivialement sur la structure périphérique. C'est à dire que si $C_1, \ldots, C_n \in \pi_1(S)$ sont les éléments du groupe fondamental représenté par un lacet autour de chaque composante de bord, alors les éléments de $\mathrm{Mod}(S)$ sont exactement les éléments de $\mathrm{Out}(\pi_1(S))$ qui laissent invariants chaque classe de conjugaison $[C_i]$.

Donc si $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_n) \in [G]^n$ sont n classes de conjugaison dans G, on peut définir la variété de caractères *relative* à $\mathcal{C}$ par :

$$\mathcal{X}_{\mathcal{C}}(\pi, G) = \{\rho : \pi \to G \mid \forall\, 1 \leq i \leq n, \rho(C_i) \in c_i\} / G$$

Le groupe modulaire agit donc sur chaque variété de caractères relative. Les questions sur la dynamique se posent donc également dans ce contexte.

1.3. **Domaine de discontinuité.** Le but de cet article est d'introduire une méthode due à Bowditch [1] et développée par Tan-Wong-Zhang [20] et Maloni-Palesi-Tan [12], pour définir un domaine de discontinuité pour l'action de $\mathrm{Mod}(S)$ sur les variétés de caractères relatives dans le cas $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ et lorsque la surface S est le tore à un trou ou bien la sphère à quatre trous. Le principe est d'associer à chaque élément $[\rho] \in \mathcal{X}(\pi, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ un objet qui encode à la fois le caractère de la représentation et son orbite par $\mathrm{Mod}(S)$, appelé *Application de Markov*. Nous rappelons dans le chapitre 2, les propriétés de base des variétés de caractère des groupes de surface.

On peut alors étudier de façon combinatoire l'ensemble Φ des *Application de Markov* qui est définie à partir du graphe de Cayley de $\Gamma = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. Dans le chapitre 3, nous construisons un domaine de discontinuité pour l'action de groupe Γ sur Φ.

Dans les deux chapitres suivants, nous appliquons le résultat et les méthodes introduites au cas des caractères réels qui englobent le cas des représentations dans $\mathrm{SU}(2)$ et dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Le cas du tore à un trou a déjà été entièrement étudié par Goldman [8, 7], et nous montrons comment retrouver une partie des résultats avec nos méthodes. Nous montrons également que le cas de la sphère à quatre trous est plus riche et nous donnons des exemples de dynamique qui n'apparaissaient pas dans le cas précédent.

2. Variété de caractères dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$

On rappelle les quelques définitions et résultats classiques sur les variétés de caractères. Soit π un groupe discret de présentation finie et $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. On note $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ l'ensemble des représentations de π dans G. Le groupe G agit sur cet espace par conjugaison et on s'intéresse au quotient $\mathrm{Hom}(\pi, G)/G$.

Comme le groupe G n'est pas compact, l'action de G n'est pas libre et l'espace $\mathrm{Hom}(\pi, G)/G$ muni de la topologie quotient n'est pas séparé. En effet, deux classes de conjugaison de G disjointes peuvent avoir leur adhérence non disjointe. On définit donc la variété de caractères $\mathcal{X}(\pi, G)$ comme l'ensemble des classes d'équivalence de représentations, où deux représentations sont équivalentes si les adhérences de leur orbite s'intersectent.

On peut également définir cette variété de caractères en utilisant le quotient au sens de la théorie des invariants géométrique $\mathrm{Hom}(\pi, G)//G$ (voir [15]). Ceci est équivalent à se restreindre à l'ensemble des représentations complètement réductibles et considérer le quotient topologique.

2.1. **Caractère d'une représentation.** La variété de caractères peut être paramétrée comme les points d'un ensemble algébrique affine en utilisant des coordonnées issues des fonctions trace. Le cas où π est un groupe libre est connu depuis les travaux de Vogt [22] et Magnus [11] qui ont été généralisé par Culler et Shalen pour tout groupe π de présentation finie [2].

Soit $\rho \in \mathrm{Hom}(\pi, G)$. Le *caractère* de ρ est l'application

$$\begin{aligned} \chi_\rho : \pi &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \gamma &\longmapsto \mathrm{tr}(\rho(\gamma)) \end{aligned}$$

Cette application étant invariante par conjugaison, elle descend au quotient $\mathcal{X}(\pi, G)$ et définit l'application $[\rho] \mapsto \chi_\rho$. Deux représentations complètement réductibles ρ et ρ' ont le même caractère si et seulement si $[\rho] = [\rho']$. Un élément $[\rho] \in \mathcal{X}(\pi, G)$ est donc entièrement déterminé par son caractère.

Si α est un élément de π, on peut définir la *fonction trace* associée à α par

$$\begin{aligned} t_\alpha : \mathcal{X}(\pi, G) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ [\rho] &\longmapsto \mathrm{tr}(\rho(\alpha)) \end{aligned}$$

Supposons que π est engendré par $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. On pose

$$I = \{(i_1, \dots, i_k) \mid k \geq 1, i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$$

Et pour $\underline{i} = (i_1, \dots, i_k) \in I$ on note $t_{\underline{i}} = t_{\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k}}$.

Avec ces notations, pour tout $w \in \pi$, il existe un polynôme $f_w \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_N]$ avec $N = 2^n - 1 = |I|$ tel que :

$$t_w = f_w(t_1, t_2, \dots, t_{12}, \dots, t_{12\dots n})$$

Ce résultat se montre facilement par induction sur la longueur du mot w en les générateurs et en utilisant la formule des traces :

$$\forall A, B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}), \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(AB^{-1})$$

Proposition 2.1. *Un caractère χ_ρ est entièrement déterminé par ses valeurs sur les $N = 2^n - 1$ elements de π donné par les $\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_k}$ avec $(i_1, \dots, i_k) \in I$.*

Cela permet nous donne donc un plongement $\mathcal{X}(\pi, G) \to \mathbb{C}^N$. A part dans certains cas simples, ce plongement n'est pas surjectif. Cependant on peut donner les expressions explicites des variétés de caractères qui nous intéressent.

2.2. **Groupes libres en 2 et 3 générateurs.**

• Soit $F_2 = \langle A, B \rangle$ le groupe libre en deux générateurs. On note $X = AB$. Alors l'application suivante est un homéomorphisme :

$$\begin{aligned} \chi : \mathcal{X}(F_2, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})) &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ [\rho] &\longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(\rho(A)) \\ \mathrm{tr}(\rho(B)) \\ \mathrm{tr}(\rho(X)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On notera donc par $(a, b, x) \in \mathbb{C}^3$ les coordonnées d'un élément de $\mathcal{X}(\mathcal{F}_2, G)$.

La trace du commutateur $[A, B]$ est importante dans la suite. Si on note $k = \mathrm{tr}(\rho([A, B]))$ alors

$$k = a^2 + b^2 + x^2 - abx - 2$$

• Soit $F_3 = \langle A, B, C \rangle$ le groupe libre en trois générateurs. On note $X = AB$, $Y = BC$, $Z = CA$ et $D = ABC$. Pour une représentation $[\rho] \in \mathcal{X}(F_3, G)$, on note $a = \mathrm{tr}(\rho(A)$, $b = \mathrm{tr}(\rho(B)), \dots, z = \mathrm{tr}(\rho(Z))$.

On a alors l'application suivante :

$$\begin{aligned} \chi : \mathcal{X}(F_2, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})) &\longrightarrow \mathbb{C}^7 \\ [\rho] &\longmapsto (a, b, c, d, x, y, z) \end{aligned}$$

qui est un homéomorphisme sur son image qui est le sous-ensemble de $\mathbb{C}^7$ donné par l'équation suivante :

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + x^2 + y^2 + z^2 + xyz + abcd = (ab + cd)x + (ad + bc)y + (ac + bd)z + 4 \tag{1}$$

La variété de caractères est donc un revêtement double branché de $\mathbb{C}^6$ plongé dans $\mathbb{C}^7$.

2.3. **Groupes de surface et courbes simples.** Lorsque π est un groupe de surface, et $[\rho] \in \mathcal{X}(\pi, G)$ on peut également considérer la restriction du caractère χ_ρ à l'ensemble des classes d'homotopie de courbes simples.

En effet, on définit sur $\pi_1(S)$ une relation d'équivalence $\sim$ par $g \sim h$ si g est conjugué à h ou h^{-1}. L'ensemble quotient $[\pi] = \pi/\sim$ peut être identifié avec l'ensemble des classes d'homologie de courbes fermées sur S. Il est clair que l'application caractère $\chi_\rho : \pi \to \mathbb{C}$ passe au quotient puisque la trace d'un élément de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ est invariante par conjugaison ou passage à l'inverse.

Proposition 2.2. *Soit $\mathcal{C} \subset [\pi]$ l'ensemble correspondant aux courbes fermées simples essentielles sur la surface. Le caractère χ_ρ d'une représentation ρ est entièrement déterminé par sa restriction à $\mathcal{C}$.*

Démonstration. Tout élément $w \in \pi_1(S)$ cycliquement réduit est représenté par une courbe fermée sur la surface (non forcément simple). Si cette courbe a une auto-intersection, on peut écrire w sous la forme $w = uv$ où u et v sont deux éléments du groupe fondamental basé en ce point d'intersection. On utilise la formule des traces pour montrer :

$$t_w = t_u t_v - t_{uv^{-1}}$$

avec u, v, et uv^{-1} qui sont représentés par trois courbes ayant un nombre d'auto-intersection strictement plus petit que w. On procède alors par induction sur le nombre d'auto-intersection des courbes pour montrer que t_w s'exprime comme un polynôme en les variables $t_\gamma, \gamma \in \mathcal{C}$. $\square$

On a donc une application :

$$\begin{aligned} \phi_{[\rho]} : \mathcal{C} &\to \mathbb{C} \\ [\gamma] &\mapsto \mathrm{tr}(\rho(\gamma)) \end{aligned}$$

L'idée que nous utilisons dans la suite de l'article est que l'application $\phi_{[\rho]} : \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ contient à la fois les informations sur un élément de $\mathcal{X}(\pi, G)$ mais aussi les informations sur l'orbite de $[\rho]$ sous l'action du groupe modulaire. De plus l'ensemble $\mathcal{C}$ peut-être muni d'une structure combinatoire à travers le complexe de courbes. On va donc utiliser cette combinatoire pour étudier les applications $\phi_{[\rho]}$.

Dans le cas où la surface est un tore à un trou ou une sphère à quatre trous, le complexe de courbe est isomorphe à la triangulation de Farey du plan hyperbolique, ce qui justifie les définitions du chapitre suivant.

3. Applications de markov

Dans ce chapitre nous étudions des applications définies de façon purement combinatoire sur les régions du complémentaire d'un arbre trivalent. Le but du chapitre est de construire un domaine de discontinuité pour l'action d'un groupe Γ sur l'ensemble de ces applications. Nous donnons seulement les idées principales et les étapes de la preuve, et nous renvoyons aux articles [1, 20, 12] pour les détails.

3.1. **Arbre trivalent.** Soit Σ un arbre trivalent infini plongé dans le disque unité. On pourra identifier Σ à l'arbre dual à la triangulation de Farey du plan hyperbolique. On note $V(\Sigma)$ l'ensemble des sommets, $E(\Sigma)$ l'ensemble des arêtes et $\Omega = F(\Sigma)$ l'ensemble des faces, de sorte qu'un élément de Ω correspond à un sommet de la triangulation de Farey.

On considère une coloration des arêtes $c : E(\Sigma) \cup F(\Sigma) \to \{1,2,3\}$ de sorte que si $X_i, X_j, X_k \in F(\Sigma)$ sont tels que $X_i \cap X_j \cap X_k = v \in V(\Sigma)$ alors $c(X_i) = c(X_j \cap X_k) = i$. On a donc une partition

$$E(\Sigma) = \bigcup_i E_i(\Sigma) \qquad \Omega = \bigcup_i \Omega_i$$

Un sommet $v \in V(\sigma)$ est donc un élément de $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$. Et une arête $e \in E_i(\Sigma)$ est un élément de $\Omega_j \times \Omega_k$.

De façon équivalente, on peut considérer le groupe :

$$\Gamma = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \mid \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1 \rangle$$

et considérer Σ comme le graphe de Cayley de Γ. Chaque arête correspond donc à un générateur σ_i et on lui associe l'élément $i \in \{1,2,3\}$.

Soit $\boldsymbol{\mu} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, s) \in \mathbb{C}^4$ des paramètres, et soit $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$. Par convention, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, on notera par des majuscules les éléments de Ω, et par une minuscule leur image par ϕ, par exemple $\phi(X) = x$.

Définition 3.1. *L'application ϕ est dite $\boldsymbol{\mu}$-Markov si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

– (Sommet) : *Si $X_i, X_j, X_k \in \Omega$ sont tels que $X_i \cap X_j \cap X_k = v \in V(\Sigma)$ alors*

$$\sum_i x_i^2 + \prod_i x_i = \sum_i \lambda_i x_i + s \tag{2}$$

– (Arête) : *Si X_i, X_j, X_k et X_i' sont quatre régions autour d'une arête $e \in E_i(\Sigma)$, alors*

$$x_i + x_i' = \lambda_i - x_j x_k \tag{3}$$

L'ensemble des application $\boldsymbol{\mu}$-Markov est noté $\Phi_{\boldsymbol{\mu}}$.

Une application $\boldsymbol{\mu}$-Markov est uniquement déterminée par sa valeur en trois régions autour d'un sommet donné. Le reste des valeurs se retrouvant en utilisant la condition sur les arêtes. Donc en choisissant un sommet particulier de l'arbre, on peut montrer que $\Phi_{\boldsymbol{\mu}}$ est homéomorphe à la variété :

$$\mathcal{X}_{\boldsymbol{\mu}} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2x_3 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + s\} \subset \mathbb{C}^3$$

Cette équation est à mettre en relation avec l'équation (1) de la variété de caractères de F_3. Cette identification permet également de munir $\Phi_{\boldsymbol{\mu}}$ d'une topologie naturelle.

L'arbre Σ étant le graphe de Cayley du groupe $\Gamma = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$, on a donc une action de Γ sur Σ. Cette action induit une action de Γ sur $\Phi_{\boldsymbol{\mu}}$ et donc sur $\mathcal{X}_{\boldsymbol{\mu}}$. On verra dans la suite que cette action est équivalente à l'action du groupe modulaire sur les variétés de caractères.

3.2. **Condition BQ.** Soit $\boldsymbol{\mu} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, s)$ et soit $M = M(\boldsymbol{\mu})$ une constante dépendant de $\boldsymbol{\mu}$ que nous définirons explicitement un peu plus loin.

Pour une application $\phi \in \Phi_{\boldsymbol{\mu}}$ et $t > 0$, on définit les ensembles :

$$\Omega_\phi(t) = \{X \in \Omega \mid |\phi(X)| \leq t\}$$

Définition 3.2. *On dit que l'application ϕ satisfait les conditions (BQ) lorsque :*

(1) Pour tout $X \in \Omega$, l'image $\phi(X) \notin [-2, 2]$.

(2) Il existe $t > M$ tel que L'ensemble $\Omega_\phi(t)$ est fini.

On note $(\Phi_{\boldsymbol{\mu}})_Q$ l'ensemble de ces applications.

Cette définition nous permet d'énoncer le théorème principal :

Théorèm 3.3. *(Tan-Wong-Zhang* [20], *Maloni-Palesi-Tan* [12]*)*
L'ensemble $(\Phi_{\boldsymbol{\mu}})_Q$ *est un domaine de discontinuité ouvert pour l'action de* Γ.

Remarque 3.4. *Récemment, Hu-Tan-Zhang* [9] *ont étendu ce résultat à l'action du groupe* $\Gamma_n = \mathbb{Z}_2 * \cdots * \mathbb{Z}_2$ *librement engendré par* n *involutions sur* $\mathbb{C}^n$*, en considérant des arbres* n*-valent, et en généralisant les méthodes utilisées ici.*

3.3. **Définition de la constante** $M(\boldsymbol{\mu})$**.** On pose tout d'abord une première constante :

$$K = K(\boldsymbol{\mu}) = 2 + \frac{\max_i\{\lambda_i\}}{2} \tag{4}$$

Soit également la fonction polynomiale :

$$\sigma_i(w) = (4 - w^2)(\lambda_i w + s - w^2) + \lambda_j^2 + \lambda_k^2 - w\lambda_j\lambda_k$$

On note que l'équation $\sigma_i(w) = 0$ n'a qu'un nombre fini de solutions, ce qui permet de définir la constante :

$$L = L(\boldsymbol{\mu}) = 2 + \max_{i,j,k}\left\{\left|\frac{2\lambda_j - w\lambda_k}{4 - w^2}\right|, \forall w \in \mathbb{C} \setminus \{-2, 2\} \text{ tel que } \sigma_i(w) = 0\right\} \tag{5}$$

La signification de la fonction σ_i et de la constante L sera donnée un peu plus loin. Finalement, on définit :

$$M = M(\boldsymbol{\mu}) = \max(K, L). \tag{6}$$

Remarque 3.5. *Les résultats initiaux de Tan, Wong et Zhang* [20] *sont dans le cas* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$*. Un simple calcul montre qu'alors* $K = L = M = 2$*.*

La preuve de ce théorème est basée sur la construction pour une application dans $(\Phi_{\boldsymbol{\mu}})_Q$ d'un arbre *attractif* fini. Le but des deux paragraphes suivants est de donner le principe de la preuve de ce théorème et d'expliquer les constantes K, L et M.

3.4. **Orientation sur les arêtes.** Une application $\phi \in \Phi_{\boldsymbol{\mu}}$, induit une orientation sur les arêtes de l'arbre Σ de la façon suivante : Si Z et W sont les deux régions aux deux extrémités d'une arête e, on oriente l'arête de telle sorte que $(Z \xrightarrow{e} W) \Leftrightarrow (|z| > |w|)$. En cas d'égalité, on oriente l'arête de façon arbitraire. On notera $\vec{\Sigma}_\phi$ l'arbre orienté muni de l'orientation induite par ϕ.

On appelle *fourche* un sommet $v \in \vec{\Sigma}_\phi$ tel qu'au moins deux des arêtes incidentes à v sont sortantes. On appelle *puits* un sommet où les trois arêtes incidentes sont rentrantes. La constante K définie en (4) permet d'énoncer le lemme suivant :

Lemme 3.6. *Soit* $\phi \in \Phi_{\boldsymbol{\mu}}$.

(1) Si $v = (X_1, X_2, X_3)$ *est une fourche alors* $\min\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} \leq K$

(2) Pour tout $t \geq K$*, l'ensemble* $\Omega_\phi(t)$ *est connexe.*

Démonstration.

(1) Soit e_i, e_j, e_k les trois arêtes incidentes à v et supposons que e_i et e_j sont sortantes. La relation donne $|x_i| \geq |\lambda_i x_j x_k - x_i|$ et $|x_j| \geq |\lambda_j x_i x_k - x_j|$.
Si $|x_i|$ et $|x_j| > 2$, on déduit facilement que :

$$|x_k| \leq 2 + \frac{|\lambda_i| + |\lambda_j|}{|x_i| + |x_j|} \leq \frac{|\lambda_i| + |\lambda_j|}{4} \leq K$$

(2) Par l'absurde, supposons que $\Omega_\phi(t)$ n'est pas connexe. Soit alors un chemin minimal de longueur m entre deux composantes connexes de $\Omega_\phi(t)$.
Si $m = 1$, alors on a une arête $e = (X_j, X_k) \in E_i(\Sigma)$ telle que $X_i, X_i' \in \Omega_\phi(t)$. On a alors $|x_j x_k| \leq |\lambda_i| + |x_i| + |x_i|' < (t-2) + 2t < t^2$, ce qui donne une contradiction. Si $m > 1$ alors les deux arêtes extrémales du chemin sont sortantes. Donc un des sommets intérieur du chemin est une fourche, ce qui donne également une contradiction en utilisant (1).

□

Soit $X \in \Omega_i$. Le bord ∂X de X est constituée d'une suite infinie d'arêtes $(e_j)_n = X \cap Y_n$ alternant avec $(e_k)_n = X \cap Z_n$, avec $Y_n \in \Omega_j$ et $\mathbb{Z}_n \in \Omega_k$. Si $\phi \in \Phi_\mu$ les valeurs y_n et z_n satisfont les relations :

$$\begin{cases} y_{n+1} & = \lambda_j - x z_n - y_{n-1} \\ z_{n+1} & = \lambda_k - x y_{n+1} - z_n \end{cases}$$

L'étude de cette relation de récurrence donne le résultat suivant :

Lemme 3.7.

(1) Si $x \in (-2, 2)$, la suite (y_n, z_n) est contenue dans une ellipse de $\mathbb{C}^2$. En particulier, $|y_n|$ et $|z_n|$ sont bornées.

(2) Si $x \in \{-2, 2\}$ alors les suites $|y_n|, |z_n|$ croissent de façon quadratique.

(3) Si $x \notin [-2, 2]$ et $\sigma_i(x) = 0$, alors les suites $|y_n|$ et $|z_n|$ convergent (dans les positifs ou les négatifs) vers des valeurs inférieures à $L(\boldsymbol{\mu})$.

(4) Si $x \notin [-2, 2]$ et $\sigma_i(x) \neq 0$ alors les suites $|y_n|$ et $|z_n|$ croissent de façon exponentielle lorsque $n \to \pm\infty$.

On voit ici l'explication de la fonction σ_i et de la constante $L(\boldsymbol{\mu})$. En effet si $\phi \in (\Phi_{\boldsymbol{\mu}})_Q$, alors toutes les régions $X \in \Omega$ sont dans le cas (4) du lemme. précédent.

3.5. **Rayons infinis.** Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie d'arêtes adjacentes distinctes et les sommets successifs $v_n = e_n \cap e_{n+1}$. On note également X_n la région telle que $X_n \cap e_n = v_{n+1}$

Lemme 3.8. *Soit $\phi \in \Phi_{\boldsymbol{\mu}}$*

(1) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\vec{e_n}$ est dirigée vers v_{n+1}, alors $\phi \notin (\Phi_{\boldsymbol{\mu}})_Q$.

(2) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\vec{e_n}$ est dirigée vers v_n, alors soit $\phi \notin (\Phi_{\boldsymbol{\mu}})_Q$, soit $|\phi(X_n)|$ croit de façon exponentielle.

Cela permet d'énoncer un résultat intermédiaire important :

Corollaire 3.9. *$\phi \in (\Phi_{\boldsymbol{\mu}})_Q$ si et seulement si pour tout $t > M$, l'ensemble $\Omega_\phi(t)$ est fini.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $s > t > M$ tels que $\Omega_\phi(t)$ est fini et $\Omega_\phi(s)$ est infini. L'ensemble $\Omega_\phi(s)$ étant connexe et $\Omega_\phi(t)$ fini, on en déduit qu'il existe une composante connexe infinie constituée de régions dans $\Omega_\phi(s) \setminus \Omega_\phi(t)$.

On peut alors construire une suite infinie d'arêtes $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle $e_n \in \Omega_\phi(s) \setminus \Omega_\phi(t)$. On considère alors les régions X_n comme précédemment, et les arêtes étant dans $\Omega_\phi(t)$, il existe une sous-suite $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, telle que $X_{n_k} \in \Omega_\phi(s)$.

La suite d'arête (e_n) correspondante est nécessairement croissante ou décroissante car on ne peut pas avoir de fourche, et $|\phi(X_{n_k})|$ est borné donc on en déduit que $\phi \notin (\Phi_{\boldsymbol{\mu}})_Q$. □

3.6. **Arbre attractif.** On dira qu'un sous-arbre $T \subset \Sigma$ est ϕ-attractif si les arêtes de $\vec{\Sigma}_\phi \setminus T$ sont toutes orientées vers T. Pour une application $\phi \in \Phi_{\boldsymbol{\mu}}$ on peut construire un sous arbre connexe de Σ qui soit ϕ-attractif, de la façon suivante.

Pour chaque région X dans $\Omega_\phi(M)$, le bord de X est constitué d'une suite infinie d'arêtes $e_m = X \cap Y_m$. On définit le sous-ensemble connexe d'arête

$$J_r(X) = \{X \cap Y_m \mid |y_m| < r\}$$

On peut définir une fonction $H(x)$ de sorte que $H(x) > M$ et telle que si $x \notin [-2, 2]$ et $\sigma_i(x) \neq 0$ alors toutes les arêtes de ∂X qui ne sont pas dans $J_{H(x)}(X)$ sont ϕ-orientées vers $J_{H(x)}(X)$.

On considère alors l'arbre :

$$T_\phi = \bigcup_{X \in \Omega_\phi(M)} J_{H(x)}(X) = \{e = (X, Y) \in E(\Sigma) \mid X \in \Omega_\phi(M), Y \in \Omega_\phi(H_{\boldsymbol{\mu}}(x_i)\}$$

Par construction et en utilisant le lemme 3.6, il est clair que T_ϕ est ϕ-attractif. De plus, l'application $\phi \in \Phi_\mu$ satisfait les conditions (BQ) si et seulement si l'arbre T_ϕ est fini.

Lemme 3.10. *Soit $\phi \in (\Phi_{\boldsymbol{\mu}})_Q$. Il existe un voisinage U de ϕ dans $\Phi_{\boldsymbol{\mu}}$, tel que $\forall \phi' \in U$ l'arbre $T_{\phi'}$ est inclus dans T_ϕ.*

Démonstration. Notons $\widetilde{T}_\phi$ l'ensemble des arêtes à distance au plus 1 de T_ϕ, c'est à dire l'union de T_ϕ et d'une couronne $C(T_\phi)$ autour de T_ϕ. Cette couronne est constituée d'un nombre fini d'arêtes.

Pour chaque arête de $e = (X, Y) \in C(T_\phi)$, on a $|x| > M$ ou $|y| > H_{\boldsymbol{\mu}}(x)$. On ne considère qu'un nombre fini d'arêtes donc cela donne un nombre fini d'inégalités strictes. Pour ϕ' suffisamment proche de ϕ, ces inégalités restent vraies. On en déduit que si ϕ' est suffisamment proche de ϕ, alors aucune arête de $C(T_\phi)$ n'est dans $T_{\phi'}$. Par connexité de $T_{\phi'}$ on en déduit que $T_{\phi'} \subset T_\phi$. □

On peut maintenant donner la preuve du Théorème 3.3. Le fait que le domaine est ouvert est une conséquence directe du lemme précédent. Pour montrer la discontinuité on considère K un compact de $\phi \in (\Phi_\mu)_Q$. Comme K est compact, le lemme précédent montre qu'il existe un nombre fini d'élément $\{\phi_i\}_{i \in I}$ tel que pour tout élément $\psi \in K$, l'arbre T_ψ est inclus dans l'un des T_{ϕ_i}. On considère alors $\widetilde{T} = \cup_{i \in I} T_{\phi_i}$ qui est un arbre fini.

Il est clair que :

$$\left\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \widetilde{T} \cap \widetilde{T} \neq \emptyset\right\} < \infty$$

On en déduit donc directement que

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma K \cap K \neq \emptyset\} < \infty$$

ce qui prouve que l'action est proprement discontinue.

Remarque 3.11. *La constante $M(\boldsymbol{\mu})$ est optimale puisqu'il existe des applications $\phi \in \Phi_{\boldsymbol{\mu}}$ telle que $\Omega_\phi(M)$ est fini, mais telles que pour tout $t > M$ l'ensemble $\Omega_\phi(t)$ est infini. (voir* [12]*)*

4. Application au cas du tore à un trou

Nous appliquons ici, le résultat du chapitre précédent à l'étude de l'action du groupe modulaire sur les variétés de caractères relatives du tore à un trou.

4.1. **Variété de caractères.**
Soit $\mathcal{T} = \Sigma_{1,1}$ un tore à un trou. Le groupe fondamental de $\mathcal{T}$ est donné par la présentation :

$$\pi_1(\mathcal{T}) = \langle A, B, K \mid [A,B] = K \rangle$$

Ce groupe est le groupe libre F_2 à deux générateurs A et B, qui sont représentés sur la surface par deux courbes simples qui s'intersectent une fois. L'élément K correspond à la courbe de bord de la surface $\mathcal{T}$.

D'après la partie 2, on rappelle que la variété de caractères du groupe libre en deux générateurs est homéomorphe à $\mathbb{C}^3$, et la variété de caractères relative est donnée par :

$$\mathcal{X}_k(\mathcal{T}) := \{[\rho] \in \mathcal{X}(\mathcal{T}) \mid a^2 + b^2 + x^2 - abx - 2 = k\}$$

Soit $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ l'ensemble des classes d'homologie libre de courbes fermées simples sur la surface $\mathcal{T}$. Alors $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ peut s'identifier avec $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ en considérant la pente de la courbe. On peut plonger $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ dans le bord du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$, et dans ce cas, le complexe de courbe peut s'identifier avec la triangulation de Farey du plan hyperbolique, où deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si les courbes correspondantes s'intersectent une fois.

On peut donc considérer l'arbre dual Σ à la triangulation de Farey, de sorte que les régions du complémentaire $\mathbb{H}^2 \setminus \Sigma$, notée Ω sont en bijection avec $\mathcal{C}(\mathcal{T})$.

Une représentation $[\rho] : \pi_1(\mathcal{T}) \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ définit une application :

$$\begin{aligned} \phi_\rho : \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ X &\longmapsto \mathrm{tr}(\rho(X)) \end{aligned}$$

Cela nous permet d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 4.1. *Soit $\boldsymbol{\mu} = (0, 0, 0, k + 2)$. L'ensemble $\Phi_{\boldsymbol{\mu}}$ s'identifie naturellement avec la variété de caractères $\mathcal{X}_k(\mathcal{T})$.*

De même il y a une identification entre Γ et un sous-groupe d'indice 2 de $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$, et l'action de Γ sur $\Phi_{\boldsymbol{\mu}}$ correspond exactement à l'action de $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$ sur $\mathcal{X}_k(\mathcal{T})$, et les résultats obtenus dans la section précédente s'appliquent directement.

4.2. **Conditions (BQ).** Pour une représentation ρ, les conditions (BQ) sont des conditions sur les traces des images des éléments de $\pi_1(T)$ correspondant à des courbes simples sur la surface. On rappelle que comme $\boldsymbol{\mu} = (0, 0, 0, k+2)$ on a les paramètres $K(\boldsymbol{\mu}) = L(\boldsymbol{\mu}) = M = 2$. On dit que $[\rho]$ satisfait les conditions (BQ) si :

(1) Pour tout $\gamma \in \mathcal{C}(\mathcal{T})$, $\rho(\gamma)$ est loxodromique.
(2) l'ensemble $\{\gamma \in \Omega \mid |\mathrm{tr}(\rho(\gamma))| \leq 2\}$ est fini.

On peut noter $(\mathcal{X}_k(T))_Q$ l'ensemble des classes de représentations satisfaisant les conditions (BQ), et dans ce cas le théorème 3.3 devient :

Théorèm 4.2. *L'ensemble $(\mathcal{X}_k(T))_Q$ est ouvert et invariant sous l'action du groupe modulaire* $\mathrm{Mod}(T)$*. De plus* $\mathrm{Mod}(T)$ *agit de façon proprement discontinue sur $(\mathcal{X}_k(T))_Q$*

Le cas $k = -2$ est particulièrement intéressant puisqu'il correspond aux représentations qui préservent le type. C'est cette situation qui a été initialement étudiée par Bowditch dans [1], où il met en relation les représentation dans $(\mathcal{X}_{-2}(T))_Q$ et les représentations quasi-fuchsiennes de $\pi_1(T)$. Il est clair que toute représentation quasi-fuchsienne satisfait les conditions (BQ), et

Bowditch conjecture que la réciproque est également vraie. Cela fournirait une caractérisation assez simple des représentations quasi-fuchsiennes.

4.3. **Caractères réels.** On se restreint maintenant aux représentations ayant un caractère réel, c'est à $\mathcal{X}_k^{\mathbb{R}}(T) = \mathbb{R}^3 \cap \mathcal{X}_k(T)$, ce qui correspond aux représentations de π dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SU}(2)$.

On note $(\mathcal{X}_k^{\mathbb{R}}(\mathcal{T}))_Q)$ les représentations satisfaisant les conditions (BQ). On établit le théorème suivant concernant l'action de $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$ sur $\mathcal{X}_k^{\mathbb{R}}(\mathcal{T})$ en fonction des valeurs de k.

Théorèm 4.3.

(1) $(\mathcal{X}_k^{\mathbb{R}}(\mathcal{T}))_Q)$ *est non-vide si et seulement si* $k \notin [2, 18]$.

(2) Le complémentaire de $(\mathcal{X}_k^{\mathbb{R}}(\mathcal{T}))_Q)$ *est non-vide si et seulement si* $k \geq -2$, *et si* $k \neq 2$, *l'action de* $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$ *est ergodique sur ce complémentaire.*

Ce théorème est un cas particulier du résultat de Goldman [8] qui décrit entièrement la dynamique sur chacune des composantes connexes de la variété de caractères, en utilisant la correspondance entre les représentation de $\pi_1(\mathcal{T})$ et les structures hyperboliques sur $\mathcal{T}$. Nous retrouvons les résultats de façon plus directe grace aux méthodes introduites ici. On rappelle la topologie de $\mathcal{X}_k^{\mathbb{R}}(\mathcal{T})$ qui se retrouve facilement à partir de l'équation :

- Si $k < 2$, $\mathcal{X}_k^{\mathbb{R}}(\mathcal{T})$ possède quatre composantes connexes contractiles telles que pour tout (x, y, z) dans ces composantes, on a $|x|, |y|, |z| > 2$.
- De plus, si $k \in [-2, 2[$, alors $\mathcal{X}_k^{\mathbb{R}}(\mathcal{T})$ possède aussi une composante connexe compacte homéomorphe à une sphère et contenue dans $[-2, 2]^3$.
- Si $k \geq 2$, $\mathcal{X}_k^{\mathbb{R}}(\mathcal{T})$ est connexe et homéomorphe à une sphère à quatre trous.

L'étude revient à étudier les applications de Markov à valeurs réelle que l'on notera $\mathbf{\Phi}_\mu^{\mathbb{R}}$. Dans ce cas, les conditions (BQ) se réduisent à une expression beaucoup plus simple.

Proposition 4.4. *Si* $\phi \in \mathbf{\Phi}_\mu^{\mathbb{R}}$ *et* $\mu \neq 4$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\phi \in (\mathbf{\Phi}_\mu^{\mathbb{R}})_{\mathbf{Q}}$

(2) $\forall X \in \Omega$, $\phi(X) \notin [-2, 2]$.

(3) Il existe un puits (x, y, z) *avec* $|x|, |y|, |z| > 2$.

Il est clair que lorsque $\mu < 4$ (c'est à dire lorsque $k < 2$), les applications contenus dans les composantes contractiles sont dans $(\mathcal{X}_k^{\mathbb{R}}(\mathcal{T}))_Q$, et que la composante compacte est dans le complémentaire de $(\mathcal{X}_k^{\mathbb{R}}(\mathcal{T}))_Q$

Dans le cas $\mu > 4$, on suppose qu'il existe un puits (x, y, z) avec $|x|, |y|, |z| > 2$. Alors deux cas sont possibles

- Si $xyz < 0$, alors il est clair que $\mu = x^2 + y^2 + z^2 - xyz > 4 + 4 + 4 + 8 = 20$.
- Si $xyz > 0$, alors une étude de la fonction montre qu'elle atteint son maximum lorsque $|x| = |y| = |z| = 2$. On en déduit que $\mu \leq 4$

De plus, lorsque $\mu > 20$ il est simple de montrer que l'équation $3x^2 - x^3 - \mu = 0$ a une solution réelle $\lambda > 2$ et que le triplet $(\lambda, \lambda, \lambda)$ définit un puits. Le domaine de discontinuité $(\mathbf{\Phi}_\mu^{\mathbb{R}})_{\mathbf{Q}}$ est donc non-vide.

4.4. **Ergodicité sur le complémentaire.** On montre maintenant l'ergodicité de l'action de Γ sur le complémentaire de $(\mathbf{\Phi}_\mu^{\mathbb{R}})_{\mathbf{Q}}$. La preuve que nous donnons ici utilise les applications de Markov, mais est assez similaire à la preuve originelle de Goldman [7].

Il suffit de montrer l'ergodicité de la relation d'équivalence induite par les orbites de l'action de Γ. On rappelle qu'une relation d'équivalence mesurable est ergodique si toute fonction mesurable constante sur chaque classe d'équivalence est constante presque partout.

Soit α, β deux régions voisines dans Ω et soit

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta} = \left\{ \phi \in \mathbf{\Phi}_\mu^{\mathbb{R}} \mid \phi(\alpha), \phi(\beta) \in (-2,2) \right\}$$

On montre dans un premier temps que presque tout élément du complémentaire de $(\mathbf{\Phi}_\mu^{\mathbb{R}})_Q$ est équivalente à un élément $\phi_0 \in \mathcal{E}_{\alpha,\beta}$.

Soit $\phi \in \mathbf{\Phi}_\mu^{\mathbb{R}} \setminus (\mathbf{\Phi}_\mu^{\mathbb{R}})_Q$. D'après la caractérisation des éléments de $(\mathbf{\Phi}_\mu^{\mathbb{R}})_Q$, il existe $X \in \Omega$ tel que $\phi(X) \in [-2,2]$. De plus, si on note Y_n, Z_n les voisins de $x \in (-2,2)$, et $\theta = \arccos\left(\dfrac{x^2-2}{2}\right)$ alors on a

$$\begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & \sin(n\theta) \\ -\sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

Pour presque tout ϕ, on a $\cos^{-1}(x/2) \notin \pi\mathbb{Q}$ et les points (y_n, z_n) sont denses sur une ellipse centrée en $(0,0)$. Donc il existe n tel que $|y_n| < 2$. Comme l'action de Γ sur Σ est transitive, il existe un élément de Γ tel que $\gamma \cdot X = \alpha$ et $\gamma \cdot Y_n = \beta$. On a donc $\phi_0 = \gamma \cdot \phi \in \mathcal{E}_{\alpha,\beta}$.

L'ensemble $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$ est un revêtement double de $(-2,2)^2$ où l'élément de Γ correspondant à l'arête $\alpha \cap \beta$ est le générateur du groupe de revêtement. Il suffit maintenant de montrer que la relation d'équivalence induite sur $(-2,2)$ est ergodique pour pouvoir conclure.

Soit $x \in (-2,2)$. La relation d'équivalence induite sur $\{x\} \times (-2,2)$ est celle correspondant à une rotation d'angle θ. Cette relation est donc ergodique pour presque tout $x \in (-2,2)$. On en déduit qu'une fonction mesurable constante sur chaque classe d'équivalence est constante sur presque toute ligne verticale $\{x\} \times (-2,2)$. On fait de même pour les lignes horizontales $(-2,2) \times \{y\}$.

Comme les lignes horizontales et verticales forment deux feuilletages transverses de $(-2,2)^2$, on en déduit que la relation d'équivalence induite sur $(-2,2)^2$ est ergodique. Les relations d'équivalence sur $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$ et sur le complémentaire de $(\mathbf{\Phi}_\mu^{\mathbb{R}})_Q$ sont donc également ergodiques.

5. La sphère à quatre trous

5.1. **Variété de caractères.** Soit $S = \Sigma_{0,4}$ une sphere à quatre trous. Le groupe fondamental de S est donné par la présentation :

$$\pi_1(S) = \langle A, B, C, D \mid ABCD \rangle$$

Ce groupe est le groupe libre F_3 à trois générateurs A, B et C. Les éléments A, B, C et D sont représentés sur la surface par des courbes homotopes aux composantes de bord. On note que les trois éléments $X = AB$, $Y = BC$ et $Z = BC$ correspondent à trois courbes simples séparantes qui s'intersectent deux à deux de façon minimale sur S.

On note $\boldsymbol{\tau} = (a,b,c,d)$ les paramètres de bord. La variété de caractères relative est donnée par l'équation (1) :

$$\mathcal{X}_{\boldsymbol{\tau}}(S) = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2x_3 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + s\}$$

où les paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, s$ dépendent uniquement de $\boldsymbol{\tau}$ et sont donnés par :

$$(7) \qquad \lambda_1 = ab + cd \quad \lambda_2 = ad + bc, \quad \lambda_3 = ac + bd, \quad s = 4 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 - abcd$$

On note $\mathcal{C}(S)$ le complexe de courbes de la surface S, où les sommets sont les classes d'homotopie libre de courbes fermées simples sur la surface S, et deux sommets sont reliés par une arête si il existe des représentants de ces courbes qui s'intersectent exactement deux fois. Alors, $\mathcal{C}(S)$ peut s'identifier avec la triangulation de Farey du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$. (voir [10])

On déduit donc que si $\boldsymbol{\tau} = (a, b, c, d)$ et $\boldsymbol{\mu} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, s)$, alors l'ensemble $\Phi_{\boldsymbol{\mu}}$ s'identifie naturellement à la variété de caractères $\mathcal{X}_{\boldsymbol{\tau}}(S)$. De même l'action de $\mathrm{Mod}(S)$ sur $\mathcal{X}_{\boldsymbol{\tau}}(S)$ correspond à l'action de Γ sur $\Phi_{\boldsymbol{\mu}}$ à indice fini près.

5.2. **Conditions (BQ).** Soit $\boldsymbol{\tau} = (a, b, c, d)$. On pose $M = M(\boldsymbol{\mu})$ comme défini dans la Partie 3.2 avec $\boldsymbol{\mu} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, s)$. De même $\mathcal{C}(S)$ est l'ensemble des classes d'homotopie de courbes fermées simples. Soit $[\rho] \in \mathcal{X}_{\boldsymbol{\tau}}(S)$, on dit que $[\rho]$ satisfait les conditions (BQ) si

(1) Pour tout $\gamma \in \mathcal{C}(S)$, $\rho(\gamma)$ est loxodromique.
(2) L'ensemble $\{\gamma \in \mathcal{C}(S) \mid |\mathrm{tr}(\rho(\gamma))| \leq M\}$ est fini.

On note $(\mathcal{X}_{\boldsymbol{\tau}}(S))_Q$ l'ensemble des classes de représentations satisfaisant les conditions (BQ). Le Théorème 3.3 devient donc :

Théorèm 5.1. *L'ensemble $(\mathcal{X}_k(S))_Q$ est ouvert et invariant sous l'action du groupe modulaire* $\mathrm{Mod}(S)$. *De plus* $\mathrm{Mod}(S)$ *agit de façon proprement discontinue sur* $(\mathcal{X}_k(S))_Q$

5.3. **Caractères réels.** On peut, comme dans le cas du tore, se restreindre aux représentations ayant un caractère réel, c'est à dire aux représentations dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ ou $\mathrm{SU}(2)$. Dans le cas du tore à un trou, nous avons vu que pour un ensemble d'intérieur non-vide de paramètres de bord, le domaine de discontinuité est vide (lorsque $s \in [4, 20]$). Le théorème suivant nous dit que, c'est en fait la seule situation ou cela se présente.

Théorèm 5.2. [12] *Soit $\boldsymbol{\tau} = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Le domaine de discontinuité $(\mathcal{X}^{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{\tau}})_Q$ est vide si et seulement si $|a| = |b| = |c| = |d|$ avec $abcd \leq 0$ et $|a| \in \{0\} \cup \left[2, \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}\right]$.*

Démonstration. Soit $\boldsymbol{\mu} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, s)$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tous nuls. Par une simple analyse de l'équation 2, on peut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et $m > 0$, il existe $\phi \in \Phi^{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{\mu}}$ et un sommet $v = (X_1, X_2, X_3) \in V(\Sigma)$ tel que

$$-(2 + \varepsilon) < \phi(X_i) < -2 \text{ et } \phi(X_j) = \phi(X_k) = m$$

Pour m suffisamment grand, on peut montrer que cet element est dans $(\Phi^{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{\mu}})_Q$. (voir [12], Section 5 pour les détails de la preuve).

Le cas $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ correspond exactement au cas du tore à un trou. Dans ce cas on a $|a| = |b| = |c| = |d| = 0$ et $abcd < 0$. On en déduit que $s = 4 - 4a^2 + a^4$, et donc que la condition la condition $s \in [4, 20]$ devient $|a| \in [2, \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}]$. □

Dans le cas du tore à un trou, lorsque la composante de bord est envoyée sur un hyperbolique et toutes les courbes simples sont envoyées sur des éléments hyperboliques de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, alors la représentation ρ est fidèle et discrète. On montre que la situation est différente pour la sphère à quatre trous :

Corollaire 5.3. *Il existe un ouvert de représentations $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ telles que toute courbe simple est envoyée sur un élément hyperbolique (y compris les composantes de bord), mais telle que ρ n'est pas fidèle et discrète.*

Démonstration. Soit $a, b, c > 2$ distincts et $d \in (-2 - 2a, 2 - 2a)$. Soit $\varepsilon > 0$, d'après la démonstration du Théorème 5.2 on peut choisir $[\rho]$ dans $(\mathcal{X}_{\boldsymbol{\tau}}^{\mathbb{R}})_Q$ de sorte que $-2 - \varepsilon < \mathrm{tr}(\rho(AB)) < -2$.

On considère alors l'élément ABC^{-1}, qui ne correspond pas à une courbe simple sur S. De plus

$$\mathrm{tr}(\rho(ABC^{-1})) = \mathrm{tr}(\rho(AB))\mathrm{tr}(\rho(C)) - \mathrm{tr}(\rho(ABC) = xa - d$$

En choisissant ε suffisamment petit, il est clair que $xa - d \in (-2, 2)$. Ce qui prouve que la représentation n'est pas fidèle ou discrète. Les conditions sur a, b, c, d, ε étant ouvertes, on obtient un ouvert de représentations satisfaisant les conditions. □

5.4. **Décomposition dynamique.** Le reste de ce chapitre est dédié au résultat suivant qui montre que le cas de la sphère à quatre trous est plus riche que celui du tore à un trou :

Proposition 5.4.
Il existe des valeurs de $\boldsymbol{\tau} = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, et une composante connexe contractile $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}_{\boldsymbol{\tau}}^{\mathbb{R}}(S)$ et trois ensembles disjoints $\mathcal{D}$,$\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{Y}$ de sorte que :
- *$\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont d'intérieur non vide.*
- *L'action est proprement discontinue sur $\mathcal{D}$.*
- *L'action est ergodique sur $\mathcal{F}$*
- *L'action sur $\mathcal{E}$ n'est ni ergodique ni proprement discontinue.*

Démonstration. On définit les trois ensembles disjoints suivants :
- $\mathcal{D} = (\Phi_{\boldsymbol{\mu}}^{\mathbb{R}})_Q \cap \mathcal{Y}$
- $\mathcal{E} = \{\phi \in \mathcal{Y} \mid |\Omega_\phi(2)| = 1\}$.
- $\mathcal{F} = \{\phi \in \mathcal{Y} \mid |\Omega_\phi(2)| \geq 2\}$.

Nous montrons sur un exemple que ces trois ensembles sont non-vides et d'intérieur non-vide et intersectent tous trois une composante connexe de $\mathcal{X}_{\boldsymbol{\tau}}^{\mathbb{R}}(S)$. Prenons $a = b = c = 1$ et $d = \frac{3}{2}$ de sorte que $\boldsymbol{\mu} = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{-11}{4})$. (Les paramètres dans un voisinage de ces valeurs conviennent également).

D'après la description de la topologie de la variété des caractères par Benedetto-Goldman, il y a cinq composantes connexes dans $\mathcal{X}_{\boldsymbol{\tau}}^{\mathbb{R}}(S)$. L'une d'elles est compacte et correspond aux représentations dans $\mathrm{SU}(2)$. Les quatres autres composantes connexes sont contractiles et l'une d'elles corresponds à l'espace de Teichmüller d'une sphère à quatre singularités coniques d'angle inférieurs à π.

On va montrer que la composante connexe qui est contenue entièrement dans $[0, +\infty[\times[0, +\infty[\times\mathbb{R}$ intersecté les ensembles $\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$ de façon non-triviale.

Le fait que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{F}$ soient non-vide se montre de façon assez directe en exhibant deux représentations satisfaisant les conditions.
- Soit $x = -\frac{9}{4}$ et $y = \frac{7}{2}$ et soit z satisfaisant l'équation (1). Cela définit une application $\phi \in (\Phi_{\boldsymbol{\mu}}^{\mathbb{R}})_Q = \mathcal{D}$. (Cela peut se vérifier de façon algorithmique en construisant l'arbre attractif défini précédemment). Le fait que $\mathcal{D}$ est ouvert et l'action est proprement discontinue sur $\mathcal{D}$ est une conséquence directe du théorème 3.3.
- De même en posant $x = y = \frac{9}{4}$, on voit que les deux solutions en z de l'équation 1 sont toutes deux dans $(-2, 2)$. Cela définit donc bien une application dans $\mathcal{F}$, et on note que cette propriété reste vraie dans un petit voisinage autour de ce triplet de point. Le fait que l'action est ergodique sur $\mathcal{F}$ se fait de façon similaire à la démonstration de la section 4.4

Il reste à montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ est d'intérieur non-vide.

Soit $(X_0, Y_0, Z_0) = v \in V(\Sigma)$. On prends l'application telle que $\phi(X_0) = \phi(Y_0) = \frac{5}{2}$ et $\phi(Z_0) = -1$. Si on note X_n, Y_n les voisins autour de la région Z_0, on remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi(X_n) = \phi(Y_n) = \frac{5}{2}$$

Alors, l'arc infini ∂Z_0 est un sous-arbre ϕ-attractif. En effet, soit un sommet v_n au bord de Z_0 et e l'arête qui part de Z_0 pour aller jusqu'à une région Z'. L'arête orientée est dirigée vers Z_0 et de plus $|\phi(Z')| = 3.75 > K(\boldsymbol{\mu})$. Par connexité de l'ensemble $\Omega_\phi(K)$ on en déduit que toutes les arêtes du sous-arbre situé à l'extrémité de l'arête e sont dirigées vers l'arête e. Donc $\Omega_\phi(2) = \{Z_0\}$ et donc $\phi \in \mathcal{E}$.

Soit ψ une application dans un voisinage de ϕ telle que $\psi(Z_0) \in (-2, 2)$. On considère l'ellipse :

$$E_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in \mathcal{X}_{\boldsymbol{\tau}}\}$$

On peut choisir ψ suffisamment proche de ϕ pour que l'ellipse E_0 soit contenue dans le carré $[2.4, 2.6]^2$. On peut alors montrer de la même façon que ∂Z_0 est encore un arbre attractif, et que les régions Z à distance 1 de Z_0 satisfont $|\phi(Z)| > K(\boldsymbol{\mu})$. Il est donc clair que la représentation ψ est également dans $\mathcal{E}$.

La fonction définie sur $\mathcal{E}$ par $f(\rho) = \min\{\mathrm{tr}(\rho(Z)) \mid Z \in \Omega\}$ est donc non-constante sur $\mathcal{E}$ mais est invariante par l'action de $\mathrm{Mod}(S)$, donc l'action de $\mathrm{Mod}(S)$ n'est pas ergodique. □

6. Autres questions

6.1. **Surfaces en genre supérieur.** On peut essayer de généraliser les méthodes présentées pour une surface g avec n composantes de bord. Cependant, une des idées essentielles dans la preuve est la description simple du complexe de courbe du tore à un trou et de la sphère à quatre trous, et notamment le fait que le dual du complexe de courbe soit un arbre.

En général, le complexe de courbe a une combinatoire beaucoup plus riche. Cependant dans un travail en préparation avec S. Maloni, nous étendons les résultats au cas du plan projectif à trois composantes de bord. Dans ce cas, le dual du complexe des courbes est un arbre, ce qui nous permet d'utiliser les méthodes présentées ici pour construire un domaine de discontinuité.

Pour les surfaces plus générales, la question reste ouverte.

6.2. **Action de $\mathcal{IA}_3$.** En étudiant la variété de caractères du groupe libre en trois générateurs, on voit qu'il y a un sous-groupe de $\mathrm{Out}(F_3)$ engendré par sept involutions, qui agit sur la variété de caractères de façon similaire à l'action introduite ici. C'est à dire qu'une involution agit sur l'hypersurface de $\mathbb{C}^7$ donnée par l'équation (1) en fixant 6 coordonnées et en prenant l'autre point d'intersection de la droite définie par ces 6 coordonnées avec la surface. Le groupe engendré par ces involutions correspond à indice fini près au groupe $\mathcal{IA}_3$ correspondant au noyau $\mathrm{Out}(F_3) \to \mathrm{PGL}(3, \mathbb{Z})$.

Peut-on construire un domaine de discontinuité pour l'action de $\mathcal{IA}_3$ sur $\mathcal{X}(F_3, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ en utilisant la méthode des applications de Markov ?

6.3. **Identités de McShane.** Les méthodes utilisées ici one été introduites par Bowditch pour donner une preuve alternative de l'identité de McShane [1], et ont ensuite été généralisées par Tan-Wong-Zhang [20, 19, 21]. Il serait intéressant de donner une autre formulation de l'identité de McShane dans le cas de la sphère à quatre trous en utilisant les méthodes introduites ici.

6.4. **Lien avec les représentations primitive-stables.** Dans [14], Minsky construit un domaine de discontinuité ouvert pour l'action de $\mathrm{Out}(F_n)$ sur la variété de caractères $\mathcal{X}(F_n, \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}))$. Ce domaine est strictement plus grand que l'ensemble de représentation Schottky, et contient donc des représentations qui ne sont pas fidèles et discrètes. Ce domaine de discontinuité est l'ensemble $\mathcal{PS}_n$ défini ci-dessous

Soit $\mathrm{Cay}(F_n)$ le graphe Cayley de F_n et soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des axes dans $\mathrm{Cay}(F_n)$ correspondant aux éléments primitifs.

Pour une représentation $\rho : F_n \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ et un point base $o \in \mathbb{H}^3$, il existe une unique application ρ-équivariante $\tau_{\rho,o}$ envoyant chaque arête de $\mathrm{Cay}(F_n)$ sur un segment géodésique.

Définition 6.1. *Une représentation $\rho : F_n \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ est dite* primitive-stable *si il existe $K, \delta > 0$ tel que l'application $\tau_{\rho,o}$ envoie chaque élément de $\mathcal{P}$ sur une (K,δ)-quasi géodésique. On note $\mathcal{PS}_n$ l'ensemble des classes de conjugaison de représentations primitive stables.*

Soit $\rho \in \mathcal{PS}_3$. Alors, pour tout élément primitif $x \in F_3$, on a $\mathrm{tr}(\rho(x)) \neq [-2,2]$. De plus, pour une représentation primitive stable on a $\{x \in F_3 \mid x \text{ est primitif et }, |\mathrm{tr}(\rho(x))| < N\}$ est fini pour tout $N > 0$. Comme les courbes simples sur la surface S correspondent à des éléments primitifs de F_3, une telle représentation satisfait les conditions (BQ). On en déduit $\mathcal{PS}_3 \subset (\mathcal{X}(\pi, \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})))_Q$.

De plus, l'ensemble $(\mathcal{X}(\pi, \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})))_Q$ est strictement plus grand que $\mathcal{PS}_3$ car on peut envoyer les composantes de bord de la surface S sur des éléments elliptiques. Or les composantes de bord correspondent également à des éléments primitifs de F_3.

Peut-on trouver une caractérisation des représentations primitives stables en termes de traces des éléments primitifs ?

Références

[1] Brian H. Bowditch. Markoff triples and quasi-Fuchsian groups. *Proc. London Math. Soc.*, 77(3) :697–736, 1998.

[2] Marc Culler and Peter B. Shalen. Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 117(1) :109–146, 1983.

[3] Benson Farb and Dan Margalit. *A primer on mapping class groups.* Princeton Univ Pr, October 2011.

[4] Robert Fricke and Felix Klein. *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen.* Teubner, 1897.

[5] William M. Goldman. Representations of fundamental groups of surfaces. Geometry and topology, Proc. Spec. Year, College Park/Md. 1983-84, Lect. Notes Math. 1167, 95-117 (1985)., 1985.

[6] William M Goldman. Topological components of spaces of representations. *Inventiones mathematicae*, 93(3) :557–607, 1988.

[7] William M. Goldman. Ergodic theory on moduli spaces. *Annals of mathematics*, 146(3) :475–507, 1997.

[8] William M. Goldman. The modular group action on real SL(2)-characters of a one-holed torus. *Geometry and Topology*, 7(1) :443–486, 2003.

[9] Hengnan Hu, Ser Peow Tan, and Ying Zhang. Polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^n$ preserving the markoff-hurwitz equation. preprint, 2012.

[10] Linda Keen and Caroline Series. The Riley slice of Schottky space. *Proc. London Math. Soc. III*, 69(1) :72–90, 1994.

[11] Wilhelm Magnus. Rings of Fricke characters and automorphism groups of free groups. *Math. Z.*, 170(1) :91–103, 1980.

[12] Sara Maloni, Frederic Palesi, and Ser Peow Tan. On the character variety of the four-holed sphere. *Groups Geom. Dyn.*, To appear, 2015.

[13] Julien Marché and Maxime Wolff. The modular action on psl(2,r)-characters in genus 2. arXiv :1309.3553.

[14] Yair N. Minsky. On dynamics of Out (F_n) on PSL(2, C) characters. *Israel J. Math.*, 2012.

[15] David Mumford. *Geometric invariant theory.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Band 34. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1965.

[16] Frederic Palesi. Connected components of spaces of representations of non-orientable surfaces. *Commun. Anal. Geom.*, 18(1) :195–217, 2010.

[17] Frederic Palesi. Ergodic actions of mapping class groups on moduli spaces of representations of non-orientable surfaces. *Geometriae Dedicata*, 151(1) :107–140, 2011.

[18] Frédéric Palesi. Connected components of PGL$(2, \mathbb{R})$-representation spaces of non-orientable surfaces. In *Geometry, topology and dynamics of character varieties. Institute for Mathematical Sciences, Singapore.*, pages 281–295. Hackensack, NJ : World Scientific, 2012.

[19] Ser Peow Tan, Yan Loi Wong, and Ying Zhang. Generalizations of McShane's identity to hyperbolic cone-surfaces. *Journal of Differential Geometry*, 72(1) :73–112, 2006.

[20] Ser Peow Tan, Yan Loi Wong, and Ying Zhang. Generalized Markoff maps and McShane's identity. *Adv. Math.*, 217(2) :761–813, 2008.

[21] Ser Peow Tan, Yan Loi Wong, and Ying Zhang. McShane's identity for classical Schottky groups. *Pacific Journal of Math*, 237(1) :183–200, 2008.

[22] H. Vogt. Sur les invariants fondamentaux des équations différentielles linéaires du second ordre. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 6 :3–71, 1889.

[23] Eugene Z. Xia. Components of $\mathrm{Hom}(\pi_1, PGL(2, \mathbb{R}))$. *Topology*, 36(2) :481–499, 1997.

Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M, UMR 7373, 13453 Marseille, France
E-mail address: `frederic.palesi@univ-amu.fr`
URL: `www.latp.univ-mrs.fr/~fpalesi`