

---

## EDP hyperboliques, Projet : Étude de l'équation de Buckley-Leverett

---

L'équation de Buckley-Leverett est une équation de conservation hyperbolique scalaire utilisée en dynamique des fluides pour modéliser un écoulement diphasique dans un milieu poreux<sup>1</sup>. L'équation de Buckley-Leverett décrit un processus de déplacement immiscible, tel que le déplacement du pétrole par de l'eau, dans un réservoir unidimensionnel ou quasi-unidimensionnel.

### 1 Introduction

Cette section ainsi que la suivante sont issues du cours de master 2 de Th. Gallouët<sup>2</sup>. Dans le cadre de la récupération des hydrocarbures, les compagnies pétrolières utilisent des simulateurs numériques. Les hydrocarbures sont piégés dans un réservoir pétrolier dont les caractéristiques sont connues, et on cherche à optimiser le plan de production : où faut-il creuser des puits, comment les positionner, comment injecter, ... pour récupérer le plus possible d'hydrocarbures. Un autre problème intéressant pour les pétroliers, et assez voisin sur le plan des modèles et de leur résolution, est la simulation numérique de la formation des bassins sédimentaires que nous n'étudierons pas ici, dont l'objectif est de déterminer la localisation des réservoirs d'hydrocarbures.

Pour créer un tel simulateur numérique, on peut décomposer le travail en trois parties :

1. élaboration d'un modèle mathématique,
2. développement de méthodes numériques pour la résolution (approchée) du modèle mathématique,
3. écriture d'un code informatique dont les données sont les caractéristiques du réservoir et dont les résultats sont les prévisions de production en fonction des paramètres de production (localisation des puits, débit d'injection ou pression d'injection. ...).

Notons que les motivations avancées ne sont pas en faveur de la réduction de  $CO_2$ ... Toutefois, les méthodes utilisées dans le contexte pétrolier sont réutilisables pour des applications plus vertes, la dépollution des sols par exemple. ...

### 2 La modélisation mathématique

Le modèle mathématique est un ensemble d'équations aux dérivées partielles (EDP) et de conditions aux limites (CL) et initiale (CI) dont les inconnues du modèle sont solutions. On donne brièvement les paramètres décrivant le milieu poreux dans lequel sont piégés les hydrocarbures, les paramètres décrivant le fluide occupant la partie poreuse du milieu et les lois mécaniques qui nous permettent d'écrire ce modèle mathématique.

**Milieu poreux.** Le milieu poreux est supposé fixe, c'est-à-dire qu'il ne change pas avec le temps (en fait, des modèles plus complexes prennent en compte une évolution temporelle du milieu). Il a des caractéristiques très variables selon sa nature. Cela peut être, par exemple, un grès, du sable, de l'argile... Le fluide, qui est un mélange d'eau et d'hydrocarbures sous forme liquide ou gazeuse, occupe l'ensemble des pores de ce milieu. Il est important de comprendre que l'on ne va pas faire une description fine du milieu et de l'écoulement du fluide jusqu'à l'échelle du pore, mais une description à une échelle bien plus grande que celle du pore. Une modélisation à l'échelle du pore serait beaucoup trop coûteuse. Le milieu poreux est caractérisé tout d'abord par sa perméabilité absolue, notée  $K$ , qui exprime la facilité pour le fluide contenu dans les pores à se déplacer, et par sa porosité  $\phi$  qui représente le volume des pores par rapport au volume total du milieu. Ces deux paramètres,  $K$  et  $\phi$  dépendent du point d'espace car la nature du milieu change avec le point d'espace considéré. Le milieu poreux est aussi caractérisé par d'autres paramètres, comme les perméabilités relatives, la pression capillaire... , que nous verrons plus loin car qui ils dépendent aussi de la nature du fluide en place.

**Fluide.** Le fluide occupant les pores est, en général, formé de trois phases, chaque phase ayant sa propre vitesse d'écoulement (ou plutôt sa vitesse de filtration), qui sont : la phase "eau", la phase "hydrocarbures sous forme liquide" et la

---

1. S.E. Buckley and M.C. Leverett (1942). "Mechanism of fluid displacements in sands". Transactions of the AIME (146) : 107-116.

2. Th. Gallouët, Récupération assistée des hydrocarbures, <https://www.i2m.univ-amu.fr/perso/thierry.gallouet/>

phase "hydrocarbures sous forme gaz". Dans ce projet, pour simplifier, on considère qu'il n'y a que deux phases : la phase "eau" et la phase "hydrocarbures sous forme liquide". On considère aussi que ces deux phases sont incompressibles (hypothèse peu réaliste pour la phase "gaz" que nous supposons ici absente). On note  $s$  la saturation de la phase "eau", c'est-à-dire la fraction du volume poreux occupée par la phase "eau". La fraction du volume poreux occupée par la phase "hydrocarbure", appelée aussi phase "huile" est donc  $(1 - s)$ . La phase eau n'est composée, en général, que d'eau mais les deux phases formées d'hydrocarbures sont composées de nombreux constituants (disons de 2 à 50, selon les modèles utilisés). La répartition d'un constituant entre les deux phases se fait selon des lois thermodynamiques. Ici, nous n'avons qu'une phase d'hydrocarbures et nous n'avons également qu'un seul constituant hydrocarbure. Il y a donc, dans le modèle étudié ici, deux phases et deux constituants et chaque constituant n'existe que dans une phase (on peut identifier phases et constituants). Il s'agit d'un modèle appelé "immiscible". L'état de chaque phase est décrit par la saturation de la phase, sa pression et sa vitesse d'écoulement. Enfin, pour écrire les équations du modèle, nous avons aussi besoin de paramètres pour les phases, comme la viscosité de chaque phase, et de paramètres qui caractérisent l'interaction entre les phases et le milieu solide tels que les perméabilités relatives et la pression capillaire (qui est la différence de pression entre les deux phases).

**Inconnues et équations.** Comme le milieu solide est supposé fixe (et connu), les inconnues du modèle sont les quantités décrivant le fluide, c'est-à-dire la saturation, la pression et la vitesse de filtration de chaque phase. Elles seront notées  $s_w, s_o, p_w, p_o, v_w, v_o$  (la lettre  $w$  correspond à phase eau et la lettre  $o$  à la phase huile). Ces quantités dépendent du temps  $t$ , variant entre 0 et  $T$ , et du point d'espace  $x$ , appartenant au domaine du réservoir, noté  $\Omega$ . On doit maintenant donner les six équations (quatre équations scalaires et deux équations vectorielles) satisfaites pour ces six inconnues (quatre inconnues scalaires et deux inconnues vectorielles).

On obtient deux équations (scalaires) en écrivant la conservation de la masse de chaque constituant, ce qui revient ici à écrire la conservation du volume de chaque phase (car les phases sont incompressibles et chaque phase contient un et un seul constituant) :

$$\partial_t(\phi s_w) + \operatorname{div} v_w = h_w \text{ dans } \Omega \times ]0, T[, \quad (1)$$

$$\partial_t(\phi s_o) + \operatorname{div} v_o = h_o \text{ dans } \Omega \times ]0, T[, \quad (2)$$

où  $h_w$  et  $h_o$  sont des termes sources, dûs aux puits. Ils seront explicités dans les sections suivantes.

Une autre équation scalaire est obtenue en remarquant que les deux phases occupent toutes les pores du milieu, c'est-à-dire :

$$s_w + s_o = 1. \quad (3)$$

Dans les équations précédentes, on a omis la dépendance en  $(x, t)$ . Par exemple, la première équation de (1) devrait s'écrire, pour tout  $(x, t) \in \Omega \times ]0, T[, \partial_t(\phi s_w)(x, t) + \operatorname{div} v_w(x, t) = h_w(x, t)$ . Pour être plus précis,  $\operatorname{div} v_w(x, t)$  est plutôt la divergence de la fonction  $x \mapsto v_w(x, t)$  prise au point  $x$ .

Les trois équations restantes sont obtenues à partir de lois de comportement, élaborées à partir d'expériences (souvent effectuées en laboratoire). Une loi dite de "pression capillaire" donne que la différence de pression entre les phases est une fonction connue, notée  $p_c$ , de la saturation de l'eau (mais cette fonction dépend du milieu solide). On a donc :

$$p_w(x, t) - p_o(x, t) = p_c(x, s_w(x, t)), \quad x \in \Omega, t \in ]0, T[. \quad (4)$$

Enfin, la loi de Darcy permet de relier les vitesses  $v_w$  et  $v_o$  au gradient de la pression de chaque phase :

$$v_w = -f_w(s_w)K(\nabla p_w - \rho_w g), \text{ dans } \Omega \times ]0, T[, \quad (5)$$

$$v_o = -f_o(s_o)K(\nabla p_o - \rho_o g), \text{ dans } \Omega \times ]0, T[. \quad (6)$$

Ici aussi, on a omis la dépendance en  $(x, t)$ . La première équation devrait s'écrire, pour tout  $(x, t) \in \Omega \times ]0, T[, v_w(x, t) = -f_w(s_w(x, t))K(x)(\nabla p_w(x, t) - \rho_w g(x))$ . Ici encore, pour être plus précis,  $\nabla p_w(x, t)$  est le gradient de fonction  $x \mapsto p_w(x, t)$  prise au point  $x$ .

Dans (5)-(6),  $f_w$  et  $f_o$  sont des fonctions connues (prise en  $s_w(x, t)$ ). Dans des modèles plus réalistes, ces fonctions peuvent aussi dépendre du point  $x$ , elles contiennent les perméabilités relatives, déjà évoquées précédemment, et les viscosités des fluides (en fait, ces viscosités dépendent aussi en général de la pression, nous n'en tiendrons pas compte ici). Les constantes  $\rho_w$  et  $\rho_o$  sont les masses volumiques des phases (supposées incompressibles) et  $g$  est le vecteur (constant) de gravité.

A ces équations, il faut ajouter des conditions initiales et des conditions aux limites (certaines quantités sont données à l'instant  $t = 0$  ou au bord du domaine) dans l'espoir que le problème soit ainsi bien posé, c'est-à-dire qu'il admette une unique solution. Dans les sections suivantes, nous allons d'une part étudier le problème de Riemann associé à l'équation résultante, dite équation de Buckley-Leverett, et d'autre part tenter de calculer une solution approchée de ce problème.

Dans le cadre de projet, on se limitera à la simulation d'une situation unidimensionnelle (c'est-à-dire  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$ ) en négligeant la pression capillaire, les termes source dûs aux puits ainsi que la gravité, et en supposant le milieu solide homogène.

On pourra consulter le cours de Th. Gallouët (voir note 2 page 1) pour des simulations avec gravité et en deux dimensions d'espace avec une modélisation plus réaliste des puits, des termes de gravité et en considérant un milieu hétérogène.

Bien sûr, de nombreux développements pourraient être réalisés, plus ou moins importants selon les réservoirs considérés : milieu anisotrope, pression capillaire, modèle triphasique avec thermodynamique, interaction fluide-roche (mouillabilité, fracturation hydraulique, compaction)...

### 3 Modèle unidimensionnel

#### 3.1 Modèle sans terme de gravité

On considère ici un modèle unidimensionnel sans pression capillaire, sans puits et sans terme de gravité, dans un milieu solide homogène. Ceci modélise par exemple une expérience de laboratoire sur une "carotte" de milieu poreux pleine d'huile et dans laquelle on injecte de l'eau à une extrémité. On ne s'intéresse pas aux unités, c'est-à-dire que l'on ne cherche à donner des valeurs réalistes pour les quantités ayant une dimension, telles que la pression, la viscosité et la perméabilité. On pourra consulter le cours de Th. Gallouët précité pour ces questions.

La variable spatiale  $x$  appartient à  $\Omega = ]0, 1[$  et la variable temporelle à  $]0, T[$ , où  $T > 0$  est donné. En reprenant les équations de la section 2 et en notant  $s = s_w$  et  $p = p_w$ , on obtient :

$$\partial_t(\phi s) + \partial_x v_w = 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[, \quad (7)$$

$$\partial_t(\phi(1-s)) + \partial_x v_o = 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[,$$

et :

$$\begin{aligned} v_w &= -f_w(s)K\partial_x p, \text{ dans } \Omega \times ]0, T[, \\ v_o &= -f_o(s)K\partial_x p, \text{ dans } \Omega \times ]0, T[, \end{aligned} \quad (8)$$

ce qui peut aussi s'écrire, en éliminant  $v_w$  et  $v_o$  et en utilisant le fait que  $\phi$  est une constante strictement positive (ainsi que  $K$  d'ailleurs) :

$$\begin{aligned} \partial_t s - \partial_x \left[ f_w(s) \frac{K}{\phi} \partial_x p \right] &= 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[, \\ -\partial_t s - \partial_x \left[ f_o(s) \frac{K}{\phi} \partial_x p \right] &= 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[. \end{aligned} \quad (9)$$

Les fonctions  $f_w$  et  $f_o$  sont des données du problème (elles sont déterminées à partir d'expériences). Voici des exemples de fonctions possibles :

$$\textbf{Exemple 1 : } f_w(s) = s, f_o(s) = 1 - s, \text{ pour tout } s \in [0, 1], \quad (10)$$

$$\textbf{Exemple 2 : } f_w(s) = s^2, f_o(s) = \frac{(1-s)^2}{4}, \text{ pour tout } s \in [0, 1].$$

D'autres exemples sont possibles, mais, dans tous les cas, la fonction  $f_w + f_o$  est continue et strictement positive sur  $[0, 1]$ , la fonction  $f_w$  est lipschitzienne croissante et s'annule en 0, et la fonction  $f_o$  est lipschitzienne décroissante et s'annule en 1.

L'avantage considérable du cas unidimensionnel est qu'il est possible d'éliminer l'inconnue  $p$ . En effet, en sommant les deux équations de (9), on obtient :

$$\partial_x \left[ (f_w(s) + f_o(s)) \frac{K}{\phi} \partial_x p \right] = 0 ;$$

la quantité  $\left[ (f_w(s) + f_o(s)) \frac{K}{\phi} \partial_x p \right]$  ne dépend que de  $t$  et donc il existe  $q$ , ne dépendant que de  $t$ , t.q. :

$$\left[ -\frac{K}{\phi} \partial_x p \right] (x, t) = \frac{q(t)}{f_w(s(x, t)) + f_o(s(x, t))}, \text{ pour tout } (x, t) \in ]0, 1[ \times ]0, T[ \quad (11)$$

(on rappelle que la fonction  $f_w + f_o$  ne s'annule pas). On suppose, pour simplifier, que  $q(t)$  ne dépend pas de  $t$  (cette simplification est mineure), on note  $\alpha$  cette valeur constante de  $q$ . On peut supposer  $\alpha \geq 0$  (sinon, il suffit de changer la variable  $x$  en  $-x$ ). Compte tenu de (11), le système (9) se réduit à :

$$\partial_t s + \partial_x \left[ \frac{\alpha f_w(s)}{f_w(s) + f_o(s)} \right] = 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[. \quad (12)$$

Cette équation s'appelle "équation de Buckley-Leverett" dans la littérature pétrolière. Il s'agit d'une équation hyperbolique (en général, non linéaire),  $\partial_t s + \partial_x(f(s)) = 0$ , avec  $f = \alpha f_w / (f_w + f_o)$ . Grâce aux hypothèses sur  $f_w$ ,  $f_o$  et  $\alpha$ , cette fonction  $f$  est toujours croissante.

Il faut maintenant compléter (12) (ou le système complet (9)) avec des conditions aux limites et initiale. Le fait que  $\alpha$  soit donné est l'une de ces conditions aux limites (la quantité  $\alpha\phi$  représente le débit de fluide). Cette condition aux limites peut s'écrire :

$$\left[ -\frac{K}{\phi}(f_w(s) + f_o(s))\partial_x p \right] (0, t) = \alpha, \text{ pour tout } t \in [0, T]. \quad (13)$$

Pour obtenir une seconde condition aux limites et une condition initiale, on suppose que l'on modélise un milieu poreux saturé d'huile et que l'on injecte en  $x = 0$  de l'eau (avec le débit  $\alpha$  constant). On demande donc que  $s(0, t) = 1$  pour tout  $t$  (injection d'eau pure) et que  $s(x, 0) = 1$  pour tout  $x$  (le milieu poreux est saturé d'huile à l'instant initial). Si on s'intéresse au système complet (9), il faut ajouter une condition aux limites sur  $p$ , par exemple  $p(1, t)$  connu pour tout  $t$ .

On peut maintenant calculer la solution exacte (pour  $s$  mais aussi pour  $p$  si on le souhaite) dans les deux exemples donnés en (10).

**Exemple 1 :** On a, pour cet exemple,  $f(s) = \alpha s$  pour tout  $s \in [0, 1]$ . L'équation (12) est linéaire. On peut supposer  $\alpha = 1$  (pour  $\alpha > 0$ , on se ramène à  $\alpha = 1$  par un changement de temps). Compte tenu des conditions aux limites et initiale, la solution est, à l'instant  $T$  :

$$s(x, T) = 1, \text{ si } x < T, \quad s(x, T) = 0, \text{ si } x > T.$$

**Exemple 2 :** On a, pour cet exemple,  $f(s) = \alpha 4s^2 / (4s^2 + (1-s)^2)$  pour tout  $s \in [0, 1]$ . L'équation (12) est non linéaire. Ici aussi on peut supposer  $\alpha = 1$  (pour  $\alpha > 0$ , on se ramène à  $\alpha = 1$  par un changement de temps). On note  $\gamma$ , l'unique point de  $]0, 1[$  est t.q.  $f'(\gamma) = f(\gamma)/\gamma$ , un calcul simple donne  $\gamma = 1/\sqrt{5}$  (c'est-à-dire environ 0.48). À l'instant  $T$ , la solution  $u(\cdot, T)$  est une fonction convexe décroissante de 1 à  $\gamma$  lorsque  $x$  décrit l'intervalle  $]0, f'(\gamma)T[$ , elle est discontinue au point  $f'(\gamma)T$  (c'est-à-dire environ 0.81 pour  $T = 1/2$ ) et est égale à 0 pour  $x > f'(\gamma)T$ . Cette solution est l'unique solution faible entropique du problème (et c'est bien la solution recherchée). Il est intéressant de remarquer que la solution de l'exemple 1 est une solution faible (mais non entropique) de l'exemple 2. . . .

### 3.2 Modèle avec terme de gravité

On ajoute maintenant un terme de gravité au modèle étudié et discrétisé dans les sections 3.1-???. Ceci revient à considérer une carotte verticale plutôt que horizontale. Les autres données et paramètres sont ceux des sections 3.1-???.

On rappelle que  $\rho_w$  et  $\rho_o$  sont les masses volumiques des deux phases (on a  $\rho_w > \rho_o$ ) et que  $g$  est la constante de gravité. Les équations (8) deviennent alors :

$$\begin{aligned} v_w &= -f_w(s)K\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho_w g\right), \text{ dans } \times]0, T[, \\ v_o &= -f_o(s)K\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho_o g\right), \text{ dans } \times]0, T[. \end{aligned} \quad (14)$$

Avec les équations (7), le système (9) devient donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ f_w(s) \frac{K}{\phi} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho_w g \right) \right] &= 0 \text{ dans } \times]0, T[, \\ -\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ f_o(s) \frac{K}{\phi} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho_o g \right) \right] &= 0 \text{ dans } \times]0, T[. \end{aligned} \quad (15)$$

Les fonctions  $f_w$  et  $f_o$  sont identiques à celles des sections précédentes. On rappelle que la fonction  $f_w + f_o$  est continue et strictement positive sur  $[0, 1]$ , la fonction  $f_w$  est lipschitzienne, croissante et nulle en 0, et la fonction  $f_o$  est lipschitzienne, décroissante et nulle en 1.

Ici aussi, il est possible d'éliminer l'inconnue  $p$ . En sommant les deux équations de (9), on obtient :

$$\frac{K}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (f_w(s) + f_o(s)) \frac{\partial p}{\partial x} - f_w(s) \rho_w g - f_o(s) \rho_o g \right] = 0,$$

et donc que la quantité  $\frac{K}{\phi} \left[ (f_w(s) + f_o(s)) \frac{\partial p}{\partial x} - f_w(s) \rho_w g - f_o(s) \rho_o g \right]$  ne dépend que de  $t$ . On suppose aussi qu'elle ne dépend pas de  $t$  et on note  $-\alpha$  cette valeur. On a donc

$$-K(f_w(s) + f_o(s)) \frac{\partial p}{\partial x} + K f_w(s) \rho_w g + K f_o(s) \rho_o g = \alpha \phi \text{ dans } ]0, 1[ \times ]0, T[. \quad (16)$$

Avec cette équation on exprime  $\frac{\partial p}{\partial x}$  :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\alpha\phi}{K(f_w(s) + f_o(s))} + \frac{f_w(s)\rho_w + f_o(s)\rho_o}{(f_w(s) + f_o(s))}g.$$

On remplace  $\frac{\partial p}{\partial x}$  par cette expression dans la première équation de (15) et on obtient, par un petit calcul :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\alpha f_w(s)}{f_w(s) + f_o(s)} + \beta \frac{f_w(s)f_o(s)}{f_w(s) + f_o(s)} \right] = 0 \text{ dans } ]0, T[,$$

avec  $\frac{K}{\phi}(\rho_w - \rho_o) > 0$ . Ceci peut aussi s'écrire :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{f_w(s)(\alpha + \beta f_o(s))}{f_w(s) + f_o(s)} \right] = 0 \text{ dans } ]0, T[, \quad (17)$$

Il s'agit aussi d'une équation hyperbolique non linéaire,  $s_t + (f(s))_x = 0$ , avec maintenant  $f$  donnée par :

$$f(\sigma) = \frac{f_w(\sigma)(\alpha + \beta f_o(\sigma))}{(f_w(\sigma) + f_o(\sigma))}, \text{ pour tout } \sigma \in [0, 1]. \quad (18)$$

Contrairement au cas de la section 3.1, cette fonction  $f$  n'est pas toujours croissante. Si on reprend l'exemple 1 de (10), on obtient  $f(\sigma) = -\beta\sigma^2 + (\alpha - \beta)\sigma$  pour tout  $\sigma \in [0, 1]$ .

Il faut maintenant compléter (17) (ou le système complet (15)) avec des conditions aux limites et initiale. La condition initiale est toujours  $s(x, 0) = 1$  pour tout  $x$  (le milieu poreux est saturé d'huile à l'instant initial). La quantité  $\alpha\phi$ , supposée connue, représente toujours le débit du fluide (qui est la somme des débits des deux phases), ce qui peut être vu comme une condition aux limites (le débit est donné en  $x = 0$ , par exemple), mais cette condition aux limites est insuffisante. Le problème des conditions aux limites pour une équation hyperbolique non linéaire comme (17) est difficile (mais maintenant bien compris). Il n'est pas abordé ici. Dans la partie numérique, on se contente de donner un choix possible des conditions aux limites pour  $s$  (ou plutôt pour  $f_w(s)$  et  $f_o(s)$ ). Comme dans la section 3.1, si on s'intéresse au système complet (15), il faut ajouter une condition aux limites sur  $p$ , par exemple  $p(1, t)$  connu pour tout  $t$ .

## 4 Étude du problème de Riemann pour une fonction convexe-concave

Il est intéressant pour caler les codes de calcul de les faire tourner d'abord sur des problèmes dont on connaît la solution exacte. Dans ce but, on s'intéresse au problème de Riemann

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (19a)$$

$$u(x, 0) = u_g \text{ pour } x < 0, \quad u(x, 0) = u_d \text{ pour } x > 0. \quad (19b)$$

On suppose ici que la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est convexe puis concave : plus précisément, on considère  $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  avec

(i)  $f(0) = 0, f'(0) = f'(1) = 0$

(ii)  $\exists a \in ]0, 1[, \text{ tel que } f \text{ est strictement convexe sur } ]0, a[, f \text{ est strictement concave sur } ]a, 1[.$

On suppose de plus que  $u_g = 1, u_d = 0$ .

1. Montrer qu'il existe un unique point  $b$  de l'intervalle  $]a, 1[$  tel que  $\frac{f(b)}{b} = f'(b)$ . Puis, montrer qu'il existe un unique point  $c$  de  $]0, b[$  tel que  $f'(c) = f'(b)$ .

On conserve dans la suite cette notation des points  $b$  et  $c$ .

2. On définit (p.p.) la fonction  $u$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} u(x, t) = 1 & \text{si } x \leq 0 \\ u(x, t) = \xi & \text{si } x = f'(\xi)t, \quad b < \xi < 1 \\ u(x, t) = 0 & \text{si } x > f'(b)t \end{cases}$$

Montrer que  $u$  est la solution faible entropique de (19).

[Pour montrer que la condition d'entropie, on pourra commencer par remarquer que pour toute fonction  $\eta$  (de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ) de classe  $C^1$  et convexe, on a  $\int_0^b (f'(b) - f'(x))(\eta'(x) - \eta'(c))dx \leq 0$ .]

On peut ainsi construire la solution entropique du problème de Riemann dans le cas intéressant pour l'ingénierie pétrolière, de l'équation de Buckley-Leverett, c'est-à-dire pour

$$f(u) = \frac{u^2}{u^2 + \frac{(1-u)^2}{4}} \text{ et } u_g, u_d \in [0, 1].$$

Pour cela, on distingue les cas où la fonction  $f$  est convexe-concave ou convexe ou concave entre  $u_g$  et  $u_d$ , selon les valeurs de  $u_g$  et  $u_d$ .

## 5 Etude numérique

On se donne  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$  et 2 fonctions régulières,  $f_1$  et  $f_2$ , de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant  $f_1(0) = 0, f_1$  croissante,  $f_2(1) = 0$  et  $f_2$  décroissante. On pose  $f = \frac{(\alpha + \beta f_2) f_1}{f_1 + f_2}$ . On suppose que  $I = ]0, 1[, T > 0$  et on se donne  $u_0 \in L^\infty(I), 0 \leq u_0 \leq 1$  p.p.. On ajoute deux conditions aux limites, en 0 et en 1, notées  $\bar{u}$  et  $\bar{\bar{u}}$ , qui sont dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

On s'intéresse au problème

$$u_t(x) + (f(u))_x = 0, \quad x \in I, \quad t > 0, \quad (20)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad x \in I, \quad (21)$$

$$u(0, t) = \bar{u}, \quad u(1, t) = \bar{\bar{u}}, \quad t > 0. \quad (22)$$

Ce problème admet une unique solution faible entropique (voir le cours, en particulier pour la prise en compte des conditions aux limites). On cherche à calculer de manière approchée cette solution à l'instant  $T$  donné.

Pour discrétiser ce problème, on utilise un maillage uniforme de pas  $h = 1/N$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ) en espace et de pas  $\delta t = T/M$  ( $M \in \mathbb{N}^*$ ) en temps. Les inconnues discrètes sont notées  $u_i^n, i \in \{1, \dots, N\}$  et  $n \in \{0, \dots, M\}$ . La quantité  $u_i^n$  est censée approcher les valeurs de  $u(x, t)$  pour  $x \in ]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$  et  $t \in [t_n, t_{n+1}[$ , avec  $x_{i+\frac{1}{2}} = ih$  et  $t_n = n\delta t$ . Les schémas numériques que nous allons étudier sont de la forme (volumes finis explicites) :

$$h \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} + f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n = 0, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad n \in \{0, \dots, M-1\}, \quad (23)$$

$$u_i^0 = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_0(x) dx, \quad i \in \{1, \dots, N\}. \quad (24)$$

La quantité  $f_{i+\frac{1}{2}}^n$  est donc censée être une approximation de  $f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n))$ . On pose  $\frac{\delta t}{h} = \lambda$ . Les schémas étant explicites, nous aurons dans la suite une limitation sur  $\lambda$ .

### 1. Equation non linéaire, $f' \geq 0$

On prend ici  $T = 1/2, f_1(s) = s^2, f_2(s) = \frac{(1-s)^2}{4}$  (pour tout  $s \in [0, 1]$ ),  $\alpha = 1$  et  $\beta = 0$ . On a alors  $f' \geq 0$  sur  $]0, 1[$  et on peut prolonger  $f$  de manière à avoir  $f' \geq 0$  sur tout  $\mathbb{R}$ . Il est alors inutile de donner  $\bar{\bar{u}}$  (la solution exacte ne dépend pas de  $\bar{\bar{u}}$ ). Enfin, on prend  $\bar{u} = 1$  et  $u_0 = 0$ .

Calculer la solution approchée obtenue avec le schéma de Godunov (qui ici est le schéma décentré amont) avec  $\lambda = 1/m$  et  $\lambda = 1/(2m), m = \max\{f'(s), s \in [0, 1]\}$  (on pourra faire un calcul approché de  $m$ ).

Utiliser la solution exacte calculée à la section précédente pour obtenir l'ordre de convergence (en prenant des valeurs de  $N$  entre 100 et 1000).

### 2. Equation non linéaire, $f'$ change de signe

On prend ici  $f_1(s) = s, f_2(s) = (1-s)$  (pour tout  $s \in [0, 1]$ ),  $\alpha = 1, \beta = 2$  (la fonction  $f$  est donc concave sur  $]0, 1[$ ),  $u_0 = 0, \bar{u} = 0.66, \bar{\bar{u}} = 1$ .

Comparer pour  $T = 1/4$  et  $T = 3$ , avec  $\lambda = 1/(2m), m = \alpha + \beta = 3$ , les solutions approchées données par les deux schémas obtenus en prenant les flux numériques suivants :

(a) schéma "amont des pétroliers" :  $g = g_P$ , avec

$$g_P(a, b) = \begin{cases} \frac{f_1(a)(\alpha + \beta f_2(a))}{f_1(a) + f_2(a)} & \text{si } -\alpha + \beta f_1(a) \leq 0, \\ \frac{f_1(a)(\alpha + \beta f_2(b))}{f_1(a) + f_2(b)} & \text{si } -\alpha + \beta f_1(a) > 0 \end{cases}$$

(b) schéma de Godunov :  $g = g_G$ , avec

$$g_G(a, b) = \begin{cases} \min\{f(c), c \in [a, b]\} & \text{si } a \leq b, \\ \max\{f(c), c \in [a, b]\} & \text{si } a > b > 0 \end{cases}$$

N.B. : Les deux schémas convergent vers l'unique solution entropique de (20)-(22).

## **6 Travail demandé pour le projet**

1. Lire et comprendre les sections 1, 2 et 3, en faire un résumé.
2. Résoudre le problème de Riemann de la section 4.
3. Effectuer la programmation demandée dans la section 5, et analyser les résultats obtenus.
4. Rédiger un rapport (en français ou en anglais) sur le travail effectué dans les trois items précédents. Le source latex de ce document sera fourni sur demande à ceux qui veulent rédiger leur rapport en latex.