M2 Mathématiques et Applications, Parcours EDPCS

Année universitaire 2017/2018

Examen du jeudi 15 mars

Documents autorisés.

Exercice 1 (Equation non linéaire scalaire, f croissante. Barème 10 points)**.** On considère le problème suivant :

$$\partial_t u_t(x,t) + \partial_x f(u(x,t)) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in]0,T[, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

avec $T > 0$, $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ croissante et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. On suppose aussi que u_0 est à support compact. On note $L = \max\{|f'(s)|,\ s \in A, B\}$ et A, B deux nombres réels tels que $A \leq u_0 \leq B$ p.p..

1. Rappeler la définition de solution entropique de (1)-(2).

On se donne un pas de temps, k, avec $k = \frac{1}{N+1}$ ($N \in \mathbb{N}$), et on pose $t_n = nk$, pour $n \in \{0,\ldots,N+1\}$; On se donne des points de discrétisations en espace, $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, et on suppose que x_i est le centre de la maille $M_i = [x_{i-\frac12}, x_{i+\frac12}]$, pour $i \in \mathbb{Z}$. On pose $h_i = x_{i+\frac12} - x_{i-\frac12}$ et $h_{i+\frac12} = x_{i+1} - x_i$. Soient α, $\beta \in \mathbb{R}_+^\star$. On suppose que, pour un certain $h \in \mathbb{R}$, $\alpha h \leq h_i \leq \beta h$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Pour discrétiser le problème (1)-(2), on considère le schéma suivant (schéma "décentré amont")

$$h_i \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + f(u_i^n) - f(u_{i-1}^n) = 0,\ n \in \{0,\ldots,N\},\ i \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

$$u_i^0 = \frac{1}{h_i}\int_{M_i} u_0(x)dx,\ i \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

On suppose dans toute la suite qu'il existe $\zeta \geq 0$ tel que

$$k \leq (1-\zeta)\frac{\alpha h}{L}. \tag{5}$$

2. (Stabilité L^∞)
   Montrer que, pour tout $n \in \{0,\ldots,N+1\}$ et tout $i \in \mathbb{Z}$, on a $A \leq u_i^n \leq B$.
   [On pourra commencer par écrire le schéma sous la forme $u_i^{n+1} = u_i^n + C_i^n(u_{i-1}^n - u_i^n)$.]
3. (Stabilité BV)
   On suppose, dans cette question, qu'il existe C ne dépendant que u_0 (et donc indépendant que k et h) tel que
   $$\sum_{i\in\mathbb{Z}} |u_i^0 - u_{i-1}^0| \leq C. \tag{6}$$
   Montrer que, pour tout $n \in \{0,\ldots,N+1\}$ et tout $i \in \mathbb{Z}$, on a $\sum_{i\in\mathbb{Z}} |u_i^n - u_{i-1}^n| \leq C$.
   [Utiliser la formule donnée à la question 2.]

Dans la suite, on ne suppose plus (6).

4. (Inégalité BV-faible) On note ϕ une primitive de l'application $s \mapsto sf'(s)$.
   (a) Montrer que, pour tout $a, b \in [A,B]$, on a
   $$b(f(b) - f(a)) - (\phi(b) - \phi(a)) = \int_a^b f'(s)(b-s)ds \geq \frac{1}{2L}(f(b)-f(a))^2.$$

(b) On suppose que $\zeta > 0$ (dans (5)). Montrer que

$$\sum_{n=0}^{N} k \sum_{i\in\mathbb{Z}} (f(u_i^n) - f(u_{i-1}^n))^2 \leq \frac{L}{\zeta}\|u_0\|_2^2. \tag{7}$$

[Avec (3), montrer que $\frac{h_i}{2}[(u_i^{n+1}-u_i^n)^2+(u_i^{n+1})^2-(u_i^n)^2]+k(f(u_i^n)-f(u_{i-1}^n))u_i^n = 0$. Utiliser encore (3), puis la question 4a et sommer sur n et i.]

5. (Convergence) On pose $\mathcal{T} = (M_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et on définit la solution approchée sur $[0,T]\times\mathbb{R}$, $u_{\mathcal{T},k}$, donnée par (3),(4), par $u_{\mathcal{T},k}(t,x) = u_i^n$, si $x \in M_i$ et $t \in [t_n, t_{n+1}[$.
On suppose que $u_{\mathcal{T},k}$ converge vers v dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}\times[0,T[)$ quand $h \to 0$, k vérifiant (5) avec $\zeta > 0$ (les nombres α, β et ζ sont fixés).
   (a) Montrer que v est solution faible de (1)-(2).
   [Soit $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}\times[0,+\infty[)$. On pourra, par exemple, raisonner ainsi : multiplier (3) par $k\varphi_i^n$ avec $\varphi_i^n = \varphi(x_i, t_n)$, remplacer dans le terme en espace φ_i^n par $\varphi_{i-\frac{1}{2}}^n + (\varphi_i^n - \varphi_{i-\frac{1}{2}}^n)$ avec $\varphi_{i-\frac{1}{2}}^n = \varphi(x_{i-\frac{1}{2}}, t_n)$, sommer sur i et n et utiliser (7) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.]
   (b) Question subsidiaire difficile, hors barème. Montrer que v est la solution entropique de (1)-(2).

Exercice 2 (Système des équations de Saint-Venant. Barème 10 points)**.** On considère, dans cet exercice, le problème de Riemann pour le système des équations de Saint Venant à une dimension d'espace, c'est-à-dire le système suivant :

$$\partial_t h(x,t) + \partial_x(hu)(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+, \tag{8}$$

$$\partial_t(hu)(x,t) + \partial_x(hu^2 + \frac{h^2}{2})(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+, \tag{9}$$

avec les conditions initiales :

$$h(x,0) = h_g,\ u(x,0) = u_g,\ x < 0, \tag{10}$$

$$h(x,0) = h_d,\ u(x,0) = u_d,\ x > 0, \tag{11}$$

où h_g, $h_d \in \mathbb{R}_+^\star$ et u_d, $u_g \in \mathbb{R}$ sont donnés. On pose $q_g = h_g u_g$, $q_d = h_d u_d$, $c_g = \sqrt{h_g}$, $c_d = \sqrt{h_d}$.
On rappelle que les inconnues de ce système sont les fonctions $h : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^\star$ et $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.
On introduit 2 nouvelles inconnues, q et c, définies par $q = hu$ et $c = \sqrt{h}$.
On note également $U = \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix}$, $F(U) = \begin{bmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{h^2}{2} \end{bmatrix}$, $p = \frac{h^2}{2}$ et $D = \{ \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ h > 0\}$.
Le système (8)-(9) s'écrit donc aussi

$$\partial_t U(x,t) + \partial_x(F(U))(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+. \tag{12}$$

Rappel du cours :

— Les valeurs propres de la matrice jacobienne de F au point U sont $\lambda_1(U)$ et $\lambda_2(U)$ avec $\lambda_1(U) = u - c$ et $\lambda_2(U) = u + c$

— Les invariants de Riemann associés à λ_1 er λ_2 sont $r_1(U)$ et $r_2(U)$ avec $r_1(U) = u + 2c$ et $r_2(U) = u - 2c$.

On suppose que $u_d - u_g < 2(c_g + c_d)$ (sinon le problème de Riemann n'a pas de solution). On rappelle que si $2|c_g - c_d| \leq u_d - u_g$, il est possible de constuire une solution faible de (12), (10)-(11) formée de 2 détentes reliées par un état “intermédiaire", noté $(h_\star, u_\star)$, avec $h_\star > 0$. On s'intéresse maintenant au cas $2|c_g - c_d| > u_d - u_g$. On pose

$$S = \sqrt{\frac{(h_d - h_g)(h_d^2 - h_g^2)}{2h_g h_d}}.$$

1. (Calcul d'un choc) On suppose dans cette question qu'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$, tel que

$$U(x,t) = U_g \text{ si } x < \sigma t,\ U(x,t) = U_d \text{ si } x > \sigma t.$$

   (a) Montrer que U est solution faible de (12), (10)-(11) si et seulement si $u_d = u_g \pm S$ et $\sigma(h_d - h_g) = (q_d - q_g)$.

   Définition 1 (Condition de Lax)**.** *Cette solution faible est un* 1*-choc si* $\lambda_1(U_g) > \sigma > \lambda_1(U_d)$ *et c'est un* 2*-choc si* $\lambda_2(U_g) > \sigma > \lambda_2(U_d)$.

   Montrer que U est un 1-choc si et seulement si $u_d = u_g - S$ et $h_g < h_d$. Montrer que U est un 2-choc si et seulement si $u_d = u_g - S$ et $h_g > h_d$.
   [On pourra commencer par montrer que la condition de Lax et la valeur de σ imposent $u_d < u_g$.]

   Corrigé – *La fonction U est solution faible si et seulement il existe σ tel $\sigma[h] = [hu]$ et $\sigma[hu] = [hu^2 + p]$, ce qui est equivalent à $[hu]^2 = [h][hu^2 + p]$.*
   Comme

$$[hu]^2 = (h_d u_d - h_g u_g)^2 = h_d^2 u_d^2 + h_g^2 u_g^2 - 2h_g h_d u_g u_d \text{ et}$$
$$[h][hu^2 + p] = h_d^2 u_d^2 + h_g^2 u_g^2 - h_d h_g (u_g^2 + u_d^2) + [h][p],$$

   la fonction U est solution faible si et seulement $h_d h_g (u_g - u_d)^2 = [h][p]$, c'est-à-dire $(u_g - u_d)^2 = S^2$.

   Pour $x \geq 1$, on pose $\varphi(x) = \sqrt{\frac{(x-1)(x^2-1)}{x}}$.

      i. *Montrer que φ est strictement croissante. En déduire que pour tout u_g, h_g et h_d, avec $h_d > h_g$, il existe un seul u_d tel que U soit un 1-choc.*

   (b) *On suppose dans cette question que $u_g - u_d < S$ et $h_d < h_g$. Montrer qu'on peut construire une solution de* (12)*,* (10)-(11) *formée d'une* 1*-détente et d'un* 2*-choc reliés par un état “intermédiaire”, noté $(h_\star, u_\star)$.*
   [Remarquer qu'on cherche $(h_\star, u_\star)$ tel que $u_\star + 2c_\star = u_g + 2c_g$, $u_\star = u_d + \sqrt{h_d}\varphi(\frac{h_\star}{h_d})$, $h_\star > h_d$ et qu'il faut $u_g - c_g < u_\star - c_\star < \sigma$ où σ est la vitesse du 2-choc.]

   (c) *Question subsidiaire, hors barème. On suppose dans cette question que $u_g - u_d < S$ et $h_d > h_g$. Montrer qu'on peut construire une solution de* (12)*,* (10)-(11) *formée d'une* 1*-choc et d'un* 2*-détente.*

   (d) *Question subsidiaire, hors barème. On suppose dans cette question que $u_g - u_d \geq S$. Montrer qu'on peut construire une solution de* (12)*,* (10)-(11) *formée d'un* 1*-choc et d'un* 2*-choc.*

   On s'intéresse maintenant à un problème Riemann linéarisé. Si (h, u) est une solution régulière de (8)-(9), on pose $V = \begin{bmatrix} u \\ 2c \end{bmatrix}$ et on remarque que V est solution du système

$$V_t(x,t) + B(V)V_x(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+, \text{ avec } B(V) = \begin{bmatrix} u & c \\ c & u \end{bmatrix}. \tag{13}$$

      i. (Problème de Riemann linéarisé) On pose $\overline{u} = (u_g + u_d)/2$ et $\overline{c} = (c_g + c_d)/2$.

On remplace dans le problème de Riemann (12), (10)-(11), l'équation (12) par l'équation suivante :

$$\partial_t V(x,t) + B(\overline{V})\partial_x V(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+. \tag{14}$$

Contruire la solution du problème (14), (10)-(11). Donner, quand cela est possible, la valeur de $V(0,t)$ en fonction de u_g, c_g, u_d et c_d.