Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

M2 Mathématiques et Applications, Parcours EDPCS

Année universitaire 2018/2019

EDP hyperboliques, TD 1

Exercice 1 (Unicité de la solution faible du problème linéaire par dualité) Soit $c \in \mathbb{R}$ and $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. L'objet de cet exercice est de prouver l'unicité de la solution faible u (dans $L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$) du problème de transport suivant :

$$\partial_t u(x,t) + c\partial_x u(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in]0,+\infty[, \tag{1a}$$
$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{1b}$$

1. Rappeler l'expression de la solution faible de (1).
2. Montrer qu'il suffit de prouver l'unicité de la solution pour $u_0 = 0$ p.p..

On suppose dès lors que u est une solution faible de (1) avec $u_0 = 0$ p.p..

3. Soit $\psi \in C_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Pour $x \in \mathbb{R}$ and $t \in \mathbb{R}_+$ on pose $\varphi(x,t) = -\int_t^{+\infty} \psi(x - c(t-s), s)ds$.
   (a) Montrer que $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times [0,+\infty[)$ et que $\varphi_t + c\varphi_x = \psi$ in $\mathbb{R} \times [0,+\infty[)$.
   (b) Montrer que $\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\psi(x,t)dxdt = 0$.
4. Montrer que $u = 0$ p.p..
5. En déduire que la solution faible du problème (1) est unique.

Exercice 2 (Système hyperbolique linéaire)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. On suppose A diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et on cherche $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)^n$ solution faible du problème suivant :

$$u_t(x,t) + Au_x(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in]0,+\infty[\tag{2a}$$
$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{2b}$$

Soit $\{v_i, i \in \{1,\dots,n\}\}$ une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A. On a donc $Av_i = \lambda_i v_i$ pour tout $i \in \{i,\dots,n\}$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
On décompose u_0 sur la base $\{v_i, i \in \{i,\dots,n\}\}$. On a donc $u_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ p.p. avec $\alpha_i \in L^\infty(\mathbb{R})$
Montrer que u définie presque partout par $u(x,t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x - \lambda_i t)v_i$ est l'unique solution faible de (2a)-(2b).

Exercice 3 (Non unicité des solutions faibles)

On considère l'équation

$$\begin{cases} u_t + (u^2)_x = 0 \\ u(0,x) = \begin{cases} u_g & si\ x < 0 \\ u_d & si\ x > 0 \end{cases} \end{cases} \tag{3}$$

avec $u_g < u_d$.

1. Montrer qu'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que si $\begin{cases} u(t,x) = u_g & si\ x < \sigma t \\ u(t,x) = u_d & si\ x > \sigma t \end{cases}$ alors u est solution faible de (3). Vérifier que u n'est pas solution entropique de (3).
2. Montrer que u définie par :
$$\begin{cases} u(t,x) = u_g & si\ x < 2u_g t \\ u(t,x) = \frac{x}{2t} & si\ 2u_g t \le x \le 2u_d t \\ u(t,x) = u_d & si\ x > 2u_d t \end{cases} \tag{4}$$
   alors u est solution faible entropique de (3).

Exercice 4 (Solutions du problème de Riemann, cas strictement convexe)

Soit $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ strictement convexe, et soient u_g et $u_d \in \mathbb{R}$.

1. Lemme préliminaire. - Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, soient f et $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ des fonctions convexes et $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $\phi' = \eta' f'$, montrer que :
$$\int_a^b \phi'(s)ds(b-a)ds \geq \int_a^b f'(s)ds \int_a^b \eta'(s)ds$$
2. Si $u_g > u_d$, on pose
$$\sigma = \frac{[f(u)]}{[u]} \text{ avec } [f(u)] = f(u_d) - f(u_g) \text{ et } [u] = u_d - u_g. \tag{5}$$
Montrer que la fonction u définie par
$$\left\{ \begin{array}{l} u(x,t) = u_g \; si \; x < \sigma t \\ u(x,t) = u_d \; si \; x > \sigma t \end{array} \right. \tag{6}$$
est l'unique solution entropique du problème de Riemann associé à condition initiale u_g pour $x < 0$ et u_d pour $x < 0$.
Une solution de la forme (6) est appelée une onde de “choc".
3. Montrer que si $u_g < u_d$, alors la fonction u définie par
$$\left\{ \begin{array}{ll} u(x,t) = u_g & si \; x < f'(u_g)t \\ u(x,t) = u_d & si \; x > f'(u_d)t \\ u(x,t) = \xi & si \; x = f'(\xi)t \; avec \; u_g < \xi < u_d \end{array} \right. \tag{7}$$
est l'unique solution entropique du problème de Riemann. Notons que dans ce cas, la solution entropique est continue. Une solution de la forme (7) est appelée une onde de “détente".
4. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(s) = s^4$. Calculer la solution entropique du problème de Riemann avec données $u_d \in \mathbb{R}$ et $u_g \in \mathbb{R}$ en fonction de u_d et u_g.

Exercice 5 (Construction d'une solution entropique)
On considère dans cet exercice l'équation de Burgers avec une condition initiale :
$$\left\{ \begin{array}{l} u_t + (u^2)_x = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star, \\ u(\cdot, 0) = u_0 \text{ dans } \mathbb{R}. \end{array} \right. \tag{8}$$
Construire une solution entropique de (8) pour u_0 définie par :
$$u_0(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - x & \text{si } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{array} \right.$$

Exercice 6 (Problème de Riemann, cas convexe-concave)
1. Déterminer la solution entropique du problème de Riemann dans le cas où f est strictement concave.
2. On se place dans le cas où f est convexe puis concave : plus précisément, on considère $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec
   (i) $f(0) = 0, \; f'(0) = f'(1) = 0$
   (ii) $\exists a \in]0,1[$, tel que f est strictement convexe sur$]0, a[$, f est strictement concave sur $]a, 1[$.
   On supposera de plus $u_g = 1, \; u_d = 0$.
   (a) Soit b l'unique élément $b \in]a, 1[$ tel que $\frac{f(b)}{b} = f'(b)$; montrer que u définie par :
$$\left\{ \begin{array}{ll} u(t,x) = 1 & si \; x \leq 0 \\ u(t,x) = \xi & si \; x = f'(\xi)t, \; b < \xi < 1 \\ u(t,x) = 0 & si \; x > f'(b)t \end{array} \right.$$
   est la solution faible entropique du problème de Riemann (sous les hypothèses précédentes).
   (b) Construire la solution entropique du problème de Riemann dans le cas $f(u) = \frac{u^2}{u^2 + \frac{(1-u)^2}{4}}$ et $u_g, \; u_d \in [0,1]$. [Compliqué. On distinguera plusieurs cas.)

Exercice 7 (Construction d'une solution entropique)
Construire la solution entropique du problème
$$\left\{ \begin{array}{l} u_t + (u^2)_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } > 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$
Vérifier que pour tout $t > 0$ on a bien $\int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx$.

Exercice 8 (Solution entropique)
Construire la solution entropique du problème

$$\begin{cases} u_t + (u^2)_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1, \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0, \\ 2 & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases} \end{cases}$$

Exercice 9 (Solution non entropique)
On s'intéresse à l'équation de Burgers.

$$u_t(t,x) + (u^2)_x(t,x) = 0,\ t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}, \tag{9}$$
$$u(0,x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

1. (Question de cours...) Donner le sens de "u solution faible de (9)-(10)" et "u solution entropique de (9)-(10)".

   On définit u de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$u(t,x) = 0,\ t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R},\ x < -\sqrt{t}, \tag{11}$$
$$u(t,x) = \frac{x}{2t},\ t \in \mathbb{R}_+^\star,\ x \in \mathbb{R},\ -\sqrt{t} < x < \sqrt{t}, \tag{12}$$
$$u(t,x) = 0,\ t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R},\ x > \sqrt{t}. \tag{13}$$

2. Montrer que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et $u^2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. (On rappelle qu'une fonction v de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ si $v\mathbf{1}_K \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ pour tout $K \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} = [0,\infty[\times\mathbb{R}$, K compact.)
3. (Solution faible ?) Montrer que u vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} (u(t,x)\varphi_t(t,x) + u^2(t,x)\varphi_x(t,x))dxdt = 0,\ \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}). \tag{14}$$

   La fonction u est-elle solution faible de (9)-(10) ?
4. (Solution entropique ?) Soit η une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1. On définit ϕ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\phi(s) = \int_0^s \eta'(\xi)f'(\xi)d\xi$, pour tout $s \in \mathbb{R}$. Montrer que u vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} (\eta(u)(t,x)\varphi_t(t,x) + \phi(u)(t,x)\varphi_x(t,x))dxdt \geq 0,\ \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}, \mathbb{R}_+). \tag{15}$$

   [On pourra commencer par étudier, grâce à la convexité de η, le signe de $\phi(s) - s\eta(s)$.]
   La fonction u est-elle solution entropique de (9)-(10) ?

N.B. : Dans tout l'exercice, bien distinguer $\mathbb{R}_+^\star$ et $\mathbb{R}_+$ (en particulier distinguer $C_c^1(\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $C_c^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Bien justifier dans les 3ème et 4ème questions que les quantités sous le signe $\int$ sont intégrables. La 4ème question montre que $\eta(u)_t + \phi(u)_x \leq 0$ au sens des dérivées par transposition dans $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$.

Exercice 10 (Flux strictement convexe et entropie) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. On s'intéresse ici à la solution entropique du problème suivant :

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{16}$$

Soit $\sigma \in \mathbb{R}$, $D_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^\star; x < \sigma t\}$ et $D_2 = \{(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^\star; x > \sigma t\}$. On suppose que $u_{|D_i} \in C^1(\bar{D}_i, \mathbb{R})$ $(i = 1, 2)$ et que u est solution faible de (16). En particulier, on a donc (vu en cours)

$$\sigma[u](\sigma t, t) = [f(u)](\sigma t, t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+. \tag{17}$$

1. Montrer que u est solution entropique de (16) si et seulement si

$$\sigma[\eta(u)](\sigma t, t) \geq [\phi(u)](\sigma t, t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+, \tag{18}$$

   pour toute fonction $\eta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ convexe et $\phi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\phi' = f'\eta'$.

2. Si f est strictement convexe et u est solution entropique de (16), montrer que $u_-(\sigma t, t) \geq u_+(\sigma t, t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. [On pourra choisir $\eta = f$ dans (18).]

On rappelle que $u_+(\sigma t, t) = \lim_{x \downarrow \sigma t} u(x,t)$, $u_-(\sigma t, t) = \lim_{x \uparrow \sigma t} u(x,t)$, $[u](\sigma t, t) = u_+(\sigma t, t) - u_-(\sigma t, t)$ et $[g(u)](\sigma t, t) = g(u_+(\sigma t, t)) - g(u_-(\sigma t, t))$ pour $g = f$, η ou ϕ.

Exercice 11 (Effet "Landau")

Soit f une fonction borélienne bornée et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (pour simplifier, on peut supposer que f est continue périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). On s'intéresse dans cet exercice à la limite quand $t \to +\infty$ de la solution (faible) du problème suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) + y\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,t) = 0,\ x, y \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+^\star, \\ u(x,y,0) = f(x),\ x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{19}$$

1. Donner explicitement en fonction de f l'unique solution faible de (19).

   Dans la suite, on note u cette solution faible.
   On remarquera que u est continue de $\mathbb{R}_+$ dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $p < \infty$.

   On note aussi m la moyenne de f sur une période. Enfin, pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, on pose

$$F(y,r) = \frac{1}{2r}\int_{y-r}^{y+r} f(z)dz.$$

2. (Question liminaire) Montrer que $\lim_{r \to +\infty} F(y,r) = m$, uniformément par rapport à $y \in \mathbb{R}$.
3. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$. Montrer que

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{b-\delta}^{b+\delta} \int_{a-\delta}^{a+\delta} u(x,y,t)dxdy = 4\delta^2 m.$$

   [On pourra remarquer que $\int_{b-\delta}^{b+\delta} f(x - yt)dy = 2\delta F(x - bt, \delta t)$.]
4. Montrer que $u(.,.,t) \to m$ $\star$-faiblement dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$, quand $t \to +\infty$.
5. Montrer que le résultat de la question 4 reste vrai si on remplace dans (19) $y\dfrac{\partial u}{\partial x}$ par $a(y)\dfrac{\partial u}{\partial x}$ où $a \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a'(y) \neq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. (Plus généralement, ce résultat reste vrai sous l'hypothèse plus faible que l'ensemble des points ou a' s'annule est de mesure nulle.)

Exercice 12 (Principe du maximum et positivité)

Soit v une fonction lipschitzienne et de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $u_0 \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On s'intéresse aux deux problèmes suivants :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + v\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+^\star, \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial vu}{\partial x}(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+^\star, \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{21}$$

1. Soit $A, B \in \mathbb{R}$ t.q. $A \leq u_0(x) \leq B$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit u la solution (continue) de (20), montrer que $A \leq u(x,t) \leq B$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer (en donnant un exemple) que cette propriété peut être fausse si u est solution de (21).
2. On suppose que $u_0(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit u la solution (continue) de (21), montrer que $u(x,t) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$.