

Exercice 1 (Equation linéaire, solution faible, convergence du schéma VFDA)

Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $T \in \mathbb{R}_+^*$. On considère le problème suivant :

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x u(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \in [0, T], \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (2)$$

Ce problème admet une et une seule solution faible, notée u . On se donne un pas de temps, k , avec $k = \frac{1}{N+1}$ ($N \in \mathbb{N}$), et on pose $t_n = nk$, pour $n \in \{0, \dots, N+1\}$. On se donne des points de discrétisation en espace, $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, et on suppose que x_i est le centre de la maille $M_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, pour $i \in \mathbb{Z}$. On pose $h_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ et $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On suppose que, pour un certain $h \in \mathbb{R}$, $\alpha h \leq h_i \leq \beta h$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$; On considère le schéma (3),(4) (appelé VFDA pour Volumes Finis, Décentré Amont) :

$$h_i \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + (u_i^n - u_{i-1}^n) = 0, \quad n \in \{0, \dots, N\}, i \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

$$u_i^0 = \frac{1}{h_i} \int_{M_i} u_0(x) dx, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

- (Stabilité L^∞) Montrer que $k \leq \alpha h \Rightarrow |u_i^n| \leq \|u_0\|_\infty, \forall n \in \{0, \dots, N+1\}, \forall i \in \mathbb{Z}$.
- (Estimation "BV faible") Soient $\zeta > 0$ et K un compact de $[0, T] \times \mathbb{R}$. On note $Z_K = \{i \in \mathbb{Z}; x_i \in K\}$. Montrer que :

$$k \leq (1 - \zeta)\alpha h \Rightarrow \sum_{n \in \{0, \dots, N+1\}} \sum_{i \in Z_K} k (u_i^n - u_{i-1}^n)^2 \leq C,$$

où C ne dépend que de ζ, u_0 et K .

- (Convergence) On pose $\mathcal{T} = (M_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ et on définit la solution approchée sur $[0, T] \times \mathbb{R}$, $u_{\mathcal{T}, k}$, donnée par (3),(4), par $u_{\mathcal{T}, k}(t, x) = u_i^n$, si $x \in M_i$ et $t \in [t_n, t_{n+1}[$.

Montrer que $u_{\mathcal{T}, k} \rightarrow u$, pour la topologie faible-etoile de $L^\infty(]0, T[\times \mathbb{R})$, quand $h \rightarrow 0$, avec $k \leq (1 - \zeta)\alpha h$ (ζ fixé).

Remarque : On peut aussi montrer que la convergence est forte dans $L_{loc}^p(]0, T[\times \mathbb{R})$, pour tout $p < \infty$.

Exercice 2 (Equation non linéaire, convergence par la méthode "historique" par estimation BV)

Soient $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $T > 0$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$. On cherche une approximation de la solution de l'équation hyperbolique avec condition initiale :

$$\partial_t u(x, t) + (f(u))_x(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \in [0, T],$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

On note h (resp. $k = \frac{T}{N+1}$) le pas (constant, pour simplifier) de la discrétisation en espace (resp. en temps), et u_i^n la valeur approchée recherchée de u au temps nk dans la maille $M_i = [(i - \frac{1}{2})h, (i + \frac{1}{2})h]$, pour $n \in \{0, \dots, N+1\}$ et $i \in \mathbb{Z}$. On considère le schéma obtenu par une discrétisation par volumes finis explicite à trois points :

$$h \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + (f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n) = 0, \quad n \in \{0, \dots, N\}, i \in \mathbb{Z}, \quad (5)$$

$$u_i^0 = \frac{1}{h} \int_{M_i} u_0(x) dx, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (6)$$

avec $f_{i+\frac{1}{2}}^n = g(u_i^n, u_{i+1}^n)$, où $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- On étudie, dans cette question, le schéma de Godunov, c'est-à-dire que qu'on prend

$$g(a, b) = \min\{f(s), s \in [a, b]\} \text{ si } a \leq b,$$

$$g(a, b) = \max\{f(s), s \in [a, b]\} \text{ si } a > b.$$

(a) Montrer que le schéma (5), (6) peut s'écrire :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + C_i(u_{i+1}^n - u_i^n) + D_i(u_{i-1}^n - u_i^n)$$

avec

$$C_i = \frac{k}{h} \frac{f(u_i^n) - g(u_i^n, u_{i+1}^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n} \geq 0,$$

$$D_i = \frac{k}{h} \frac{g(u_{i-1}^n, u_i^n) - f(u_i^n)}{u_{i-1}^n - u_i^n} \geq 0.$$

(b) On pose $A = \|u_0\|_\infty$, $M = \sup_{s \in [-A, A]} |f'(s)|$, et h le pas (constant) d'espace. On suppose que k et h vérifient la condition

$$k \leq \frac{h}{2M}. \quad (7)$$

On note u^n la fonction définie par : $u^n(x) = (u_i^n)$ si $x \in M_i$; montrer que, pour tout n ,

$$(\text{Stabilité } L^\infty) \|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty, \quad (8)$$

$$(\text{Stabilité } BV) \|u^n\|_{BV} \leq \|u^0\|_{BV}. \quad (9)$$

On rappelle que, comme u^n est une fonction constante par morceaux, on a :

$$\|u^n\|_{BV} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^n - u_i^n|.$$

(c) Montrer, avec la condition (7), la convergence du schéma de Godunov.

2. On suppose maintenant $f(u) = u$ et on prend $g(a, b) = (a + b)/2$ (schéma centré).

Montrer que pour tout couple k, h , les inégalités (8) et (9) sont fausses, c'est-à-dire qu'il existe $u_0 \in L^\infty \cap BV$ t.q. $\|u^1\|_\infty \not\leq \|u^0\|_\infty$, et $\|u^1\|_{BV} \not\leq \|u^0\|_{BV}$.

3. On étudie maintenant un schéma de type "MUSCL". On suppose que $f' \geq 0$ et on prend dans le schéma (5) $f_{i+\frac{1}{2}}^n = f(u_i^n + \frac{h}{2} p_i^n)$, où :

$$p_i^n = \begin{cases} \frac{\varepsilon_i^n}{2h} \min(|u_{i+1}^n - u_{i-1}^n|, 4|u_{i+1}^n - u_i^n|, 4|u_i^n - u_{i-1}^n|), & \text{où } \varepsilon_i^n = \text{sign}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \\ & \text{si } \text{sign}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) = \text{sign}(u_{i+1}^n - u_i^n) = \text{sign}(u_i^n - u_{i-1}^n) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Montrer que $\frac{1}{h}(f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n)$ est une approximation d'ordre 2 de $(f(u))_x(x_i, t_n)$ aux points où $u \in C^2$ et $\partial_x u \neq 0$.

(b) Montrer que sous une condition de type $k \leq Ch$, où C ne dépend que de u_0 et f , les inégalités (8) et (9) sont vérifiées.

Exercice 3 (Stabilité de schémas numériques)

Soient $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $T \in \mathbb{R}_+^*$. On considère le problème suivant :

$$\partial_t u(x, t) + (f(u))_x(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T], \quad (10)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (11)$$

On utilise ci dessous les notations du cours.

1. On discrétise le problème (10),(11) par le schéma de Rusanov (vu en cours). Montrer qu'il existe M (dépendant de f et u_0) tel que (8) et (9) sont vraies (pour tout n) si $M \frac{k}{h} \leq 1$
2. On discrétise le problème (10),(11) par l'un des schémas de décomposition de flux vus en cours. Montrer qu'il existe M (dépendant de f_1, f_2 et u_0) tel que (8) et (9) sont vraies (pour tout n) si $M \frac{k}{h} \leq 1$.
3. On discrétise le problème (10),(11) par le schéma de Murman-Roe (vu en cours). Montrer qu'il existe M (dépendant de f et u_0) tel que (8) et (9) sont vraies (pour tout n) si $M \frac{k}{h} \leq 1$.

4. On suppose ici que $f(s) = s$, pour tout $s \in \mathbb{R}$. On discrétise le problème (10),(11) par le schéma de Lax-Wendroff (vu en cours). Montrer que si, $\frac{k}{h} \leq 1$, on a (pour tout n) l'estimation (8) avec la norme euclidienne au lieu de la norme infini.

Montrer que, pour tout k et h , il existe u_0 tel que $\|u^1\|_\infty > \|u^0\|_\infty$.

Exercice 4 (Convergence de VFDA avec la méthode "BV-faible", f croissante)

Soient $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $T > 0$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, on suppose que f est croissante et que $A \leq u_0 \leq B$, p.p.. On cherche une approximation de la solution de l'équation hyperbolique avec condition initiale :

$$\partial_t u(x, t) + (f(u))_x(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T], \quad (12)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (13)$$

On se donne un pas de temps, k , avec $k = \frac{T}{N+1}$ ($N \in \mathbb{N}$), et on pose $t_n = nk$, pour $n \in \{0, \dots, N+1\}$; On se donne des points de discrétisations en espace, $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, et on suppose que x_i est le centre de la maille $M_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, pour $i \in \mathbb{Z}$. On pose $h_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ et $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On suppose que, pour un certain $h \in \mathbb{R}$, $\alpha h \leq h_i \leq \beta h$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On considère le schéma (14),(15) (appelé VFDA) :

$$h_i \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + (f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n) = 0, \quad n \in \{0, \dots, N\}, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (14)$$

$$u_i^0 = \frac{1}{h} \int_{M_i} u_0(x) dx, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (15)$$

avec $f_{i+\frac{1}{2}}^n = f(u_i^n)$.

On pose $M = \sup\{f'(s); A \leq s \leq B\}$.

1. (Stabilité L^∞) On suppose que $M \frac{k}{h} \leq 1$, montrer que $A \leq u_i^n \leq B$, pour tout n et i .
2. (Estimation "BV faible") Soient $\zeta > 0$ et K un compact de $[0, T] \times \mathbb{R}$. On note $Z_K = \{i \in \mathbb{Z}; x_i \in K\}$. Montrer que :

$$k \leq (1 - \zeta)\alpha h \Rightarrow \sum_{n \in \{0, \dots, N+1\}} \sum_{i \in Z_K} k (f(u_i^n) - f(u_{i-1}^n))^2 \leq C,$$

où C ne dépend que de ζ, f, u_0 et K .

3. Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times]0, T[\times]0, 1[$. On suppose que $u_{\mathcal{T},k} \rightarrow u$, quand $h \rightarrow 0$, avec $k \leq (1 - \zeta)\alpha h$ ($\zeta > 0$ est fixé) au sens suivant :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} g(u_{\mathcal{T},k}(x, t)) \varphi(x, t) dx dt \rightarrow \int_0^1 \int_0^T \int_{\mathbb{R}} g(u(x, t, a)) \varphi(x, t) dx dt da, \quad \forall \varphi \in L^1(\mathbb{R} \times]0, T[).$$

Montrer que u vérifie, pour tout $\eta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, convexe, et ϕ t.q. $\phi' = \eta' f'$:

$$\int_0^1 \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\eta(u(x, t, a)) \varphi_t(x, t) + \phi(u(x, t, a)) \varphi_x(x, t)) dx dt da + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx \geq 0, \quad (16)$$

$$\forall \varphi \in C^1([0, T[\times \mathbb{R}, \mathbb{R}_+).$$

4. Montrer que $u_{\mathcal{T},k} \rightarrow u$, quand $h \rightarrow 0$, avec $k \leq (1 - \zeta)\alpha h$ ($\zeta > 0$ est fixé), dans $L^p_{loc}(\mathbb{R} \times]0, T[)$, pour tout $p < \infty$, où est la solution entropique de (12)-(13).

[On admettra que si u est solution de (16) alors u ne dépend pas de a .]