

Exercice 1 (Système hyperbolique linéaire)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. On suppose A diagonalisable dans \mathbb{R} et on cherche $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)^n$ solution faible du problème suivant :

$$u_t(x, t) + Au_x(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \in]0, +\infty[\quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

1. Calculer la solution faible dans le cas $n = 1$.

Soit $\{v_i, i \in \{1, \dots, n\}\}$ une base de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de A . On a donc $Av_i = \lambda_i v_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

On décompose u_0 sur la base $\{v_i, i \in \{1, \dots, n\}\}$. On a donc $u_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ p.p. avec $\alpha_i \in L^\infty(\mathbb{R})$

2. Montrer que u définie presque partout par $u(x, t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x - \lambda_i t)v_i$ est solution faible de (1)-(2).

Exercice 2 (Construction d'une solution faible)

On considère dans cet exercice l'équation de Burgers avec une condition initiale :

$$\begin{cases} u_t + (u^2)_x = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(\cdot, 0) = u_0 \text{ dans } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3)$$

Construire une solution faible de (3) pour u_0 définie par :

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 1 - x & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Exercice 3 (Non unicité des solutions faibles)

On considère l'équation

$$\begin{cases} u_t + (u^2)_x = 0 \\ u(0, x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0 \\ u_d & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$

avec $u_g < u_d$.

1. Montrer qu'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que si $\begin{cases} u(t, x) = u_g & \text{si } x < \sigma t \\ u(t, x) = u_d & \text{si } x > \sigma t \end{cases}$ alors u est solution faible de (4). Vérifier que u n'est pas solution entropique de (4).

2. Montrer que u définie par :

$$\begin{cases} u(t, x) = u_g & \text{si } x < 2u_g t \\ u(t, x) = \frac{x}{2t} & \text{si } 2u_g t \leq x \leq 2u_d t \\ u(t, x) = u_d & \text{si } x > 2u_d t \end{cases} \quad (5)$$

alors u est solution faible entropique de (4).

Exercice 4 (Solutions du problème de Riemann, cas strictement convexe)

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ strictement convexe, et soient u_g et $u_d \in \mathbb{R}$.

1. Lemme préliminaire. - Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, soient f et $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ des fonctions convexes et $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $\phi' = \eta' f'$, montrer que :

$$\int_a^b \phi'(s) ds (b - a) \geq \int_a^b f'(s) ds \int_a^b \eta'(s) ds$$

2. Si $u_g > u_d$, on pose

$$\sigma = \frac{[f(u)]}{[u]} \text{ avec } [f(u)] = f(u_d) - f(u_g) \text{ et } [u] = u_d - u_g. \quad (6)$$

Montrer que la fonction u définie par

$$\begin{cases} u(x, t) = u_g & \text{si } x < \sigma t \\ u(x, t) = u_d & \text{si } x > \sigma t \end{cases} \quad (7)$$

est l'unique solution entropique du problème de Riemann associé à condition initiale u_g pour $x < 0$ et u_d pour $x > 0$.

Une solution de la forme (7) est appelée une onde de "choc".

3. Montrer que si $u_g < u_d$, alors la fonction u définie par

$$\begin{cases} u(x, t) = u_g & \text{si } x < f'(u_g)t \\ u(x, t) = u_d & \text{si } x > f'(u_d)t \\ u(x, t) = \xi & \text{si } x = f'(\xi)t \text{ avec } u_g < \xi < u_d \end{cases} \quad (8)$$

est l'unique solution entropique du problème de Riemann. Notons que dans ce cas, la solution entropique est continue. Une solution de la forme (8) est appelée une onde de "détente".

Exercice 5 (Construction d'une solution entropique)

On considère dans cet exercice l'équation de Burgers avec une condition initiale :

$$\begin{cases} u_t + (u^2)_x = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (9)$$

Construire une solution entropique de (9) pour u_0 définie par :

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - x & \text{si } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Exercice 6 (Problème de Riemann (1))

Soit f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f(s) = s^4$. Soit u_d et u_g des réels. Calculer la solution entropique du problème de Riemann avec données u_d et u_g en fonction de u_d et u_g .

Exercice 7 (Problème de Riemann (2))

- Déterminer la solution entropique du problème de Riemann dans le cas où f est strictement concave.
- On se place dans le cas où f est convexe puis concave : plus précisément, on considère $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec

(i) $f(0) = 0, f'(0) = f'(1) = 0$

(ii) $\exists a \in]0, 1[$, tel que f est strictement convexe sur $]0, a[$, f est strictement concave sur $]a, 1[$.

On supposera de plus $u_g = 1, u_d = 0$.

(a) Soit b l'unique élément $b \in]a, 1[$ tel que $\frac{f(b)}{b} = f'(b)$; montrer que u définie par :

$$\begin{cases} u(t, x) = 1 & \text{si } x \leq 0 \\ u(t, x) = \xi & \text{si } x = f'(\xi)t, b < \xi < 1 \\ u(t, x) = 0 & \text{si } x > f'(b)t \end{cases}$$

est la solution faible entropique du problème de Riemann (sous les hypothèses précédentes).

(b) Construire la solution entropique du problème de Riemann dans le cas $f(u) = \frac{u^2}{u^2 + \frac{(1-u)^2}{4}}$ et $u_g, u_d \in [0, 1]$.

[Complicé. On distinguera plusieurs cas.]

Exercice 8 (Solution entropique (1))

Construire la solution entropique du problème

$$\begin{cases} u_t + (u^2)_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{cases}$$

Vérifier que pour tout $t > 0$ on a bien $\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx$.

Exercice 9 (Solution entropique (2))

Construire la solution entropique du problème

$$\begin{cases} u_t + (u^2)_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1, \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0, \\ 2 & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases} \end{cases}$$

Exercice 10 (Solution non entropique)

On s'intéresse à l'équation de Burgers.

$$u_t(t, x) + (u^2)_x(t, x) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

$$u(0, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

1. (Question de cours...) Donner le sens de “ u solution faible de (10)-(11)” et “ u solution entropique de (10)-(11)”.

On définit u de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} par :

$$u(t, x) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x < -\sqrt{t}, \quad (12)$$

$$u(t, x) = \frac{x}{2t}, \quad t \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \in \mathbb{R}, \quad -\sqrt{t} < x < \sqrt{t}, \quad (13)$$

$$u(t, x) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x > \sqrt{t}. \quad (14)$$

2. Montrer que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et $u^2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. (On rappelle qu'une fonction v de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ si $v \mathbf{1}_K \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ pour tout $K \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} = [0, \infty[\times \mathbb{R}$, K compact.)
3. (Solution faible ?) Montrer que u vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} (u(t, x) \varphi_t(t, x) + u^2(t, x) \varphi_x(t, x)) dx dt = 0, \quad \forall \varphi \in C^1_c(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}). \quad (15)$$

La fonction u est-elle solution faible de (10)-(11) ?

4. (Solution entropique ?) Soit η une fonction convexe de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de classe C^1 . On définit ϕ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par : $\phi(s) = \int_0^s \eta'(\xi) f'(\xi) d\xi$, pour tout $s \in \mathbb{R}$. Montrer que u vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} (\eta(u)(t, x) \varphi_t(t, x) + \phi(u)(t, x) \varphi_x(t, x)) dx dt \geq 0, \quad \forall \varphi \in C^1_c(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R}_+). \quad (16)$$

[On pourra commencer par étudier, grâce à la convexité de η , le signe de $\phi(s) - s\eta(s)$.]

La fonction u est-elle solution entropique de (10)-(11) ?

N.B. : Dans tout l'exercice, bien distinguer \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_+ (en particulier distinguer $C^1_c(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $C^1_c(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$). Bien justifier dans les 3ème et 4ème questions que les quantités sous le signe \int sont intégrables. La 4ème question montre que $\eta(u)_t + \phi(u)_x \leq 0$ au sens des dérivées par transposition dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Exercice 11 (Flux strictement convexe et entropie) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. On s'intéresse ici à la solution entropique du problème suivant :

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (17)$$

Soit $\sigma \in \mathbb{R}$, $D_1 = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*; x < \sigma t\}$ et $D_2 = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*; x > \sigma t\}$. On suppose que $u|_{D_i} \in C^1(\bar{D}_i, \mathbb{R})$ ($i = 1, 2$) et que u est solution faible de (17). En particulier, on a donc (vu en cours)

$$\sigma[u](\sigma t, t) = [f(u)](\sigma t, t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+. \quad (18)$$

1. Montrer que u est solution entropique de (17) si et seulement si

$$\sigma[\eta(u)](\sigma t, t) \geq [\phi(u)](\sigma t, t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+, \quad (19)$$

pour toute fonction $\eta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ convexe et $\phi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\phi' = f'\eta'$.

2. Si f est strictement convexe et u est solution entropique de (17), montrer que $u_-(\sigma t, t) \geq u_+(\sigma t, t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. [On pourra choisir $\eta = f$ dans (19).]

On rappelle que $u_+(\sigma t, t) = \lim_{x \downarrow \sigma t} u(x, t)$, $u_-(\sigma t, t) = \lim_{x \uparrow \sigma t} u(x, t)$, $[u](\sigma t, t) = u_+(\sigma t, t) - u_-(\sigma t, t)$ et $[g(u)](\sigma t, t) = g(u_+(\sigma t, t)) - g(u_-(\sigma t, t))$ pour $g = f, \eta$ ou ϕ .

Exercice 12 (Effet "Landau")

Soit f une fonction borélienne bornée et périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (pour simplifier, on peut supposer que f est continue périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{R}). On s'intéresse dans cet exercice à la limite quand $t \rightarrow +\infty$ de la solution (faible) du problème suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) + y \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t) &= 0, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+^*, \\ u(x, y, 0) &= f(x), \quad x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (20)$$

1. Donner explicitement en fonction de f l'unique solution faible de (20).

Dans la suite, on note u cette solution faible.

On remarquera que u est continue de \mathbb{R}_+ dans $L_{loc}^p(\mathbb{R}^2)$ pour tout $p < \infty$.

On note aussi m la moyenne de f sur une période. Enfin, pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, on pose

$$F(y, r) = \frac{1}{2r} \int_{y-r}^{y+r} f(z) dz.$$

2. (Question liminaire) Montrer que $\lim_{r \rightarrow +\infty} F(y, r) = m$, uniformément par rapport à $y \in \mathbb{R}$.
3. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$. Montrer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{b-\delta}^{b+\delta} \int_{a-\delta}^{a+\delta} u(x, y, t) dx dy = 4\delta^2 m.$$

[On pourra remarquer que $\int_{b-\delta}^{b+\delta} f(x - yt) dy = 2\delta F(x - bt, \delta t)$.]

4. Montrer que $u(\cdot, \cdot, t) \rightarrow m$ \star -faiblement dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$, quand $t \rightarrow +\infty$.
5. Montrer que le résultat de la question 4 reste vrai si on remplace dans (20) $y \frac{\partial u}{\partial x}$ par $a(y) \frac{\partial u}{\partial x}$ où $a \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a'(y) \neq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. (Plus généralement, ce résultat reste vrai sous l'hypothèse plus faible que l'ensemble des points où a' s'annule est de mesure nulle.)

Exercice 13 (Principe du maximum et positivité)

Soit v une fonction lipschitzienne et de classe C^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Soit $u_0 \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On s'intéresse aux deux problèmes suivants :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + v \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+^*, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial vu}{\partial x}(x, t) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+^*, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (22)$$

1. Soit $A, B \in \mathbb{R}$ t.q. $A \leq u_0(x) \leq B$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit u la solution (continue) de (21), montrer que $A \leq u(x, t) \leq B$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer (en donnant un exemple) que cette propriété peut être fautive si u est solution de (22).
2. On suppose que $u_0(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit u la solution (continue) de (22), montrer que $u(x, t) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$.