Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

M2 Mathématiques et Applications, Parcours EDPCS

Année universitaire 2017/2018

EDP hyperboliques, TD 2

Exercice 1 (Eq. lin., sol. faible, conv. du schéma VFDA)
Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $T \in \mathbb{R}_+^\star$. On considère le problème suivant :

$$u_t(x,t) + u_x(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in [0,T], \tag{1}$$
$$u(x,0) = u_0(x). \tag{2}$$

Ce problème admet une et une seule solution faible, notée u. On se donne un pas de temps, k, avec $k = \frac{1}{N+1}$ $(N \in \mathbb{N})$, et on pose $t_n = nk$, pour $n \in \{0,\ldots,N+1\}$; On se donne des points de discrétisations en espace, $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, et on suppose que x_i est le centre de la maille $M_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, pour $i \in \mathbb{Z}$. On pose $h_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ et $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$. Soient α, $\beta \in \mathbb{R}$. On suppose que, pour un certain $h \in \mathbb{R}$, $\alpha h \le h_i \le \underline{\mathrm{h}}$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On considère le schéma (3),(4) (appelé VFDA) :

$$h_i \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + (u_i^n - u_{i-1}^n) = 0,\ n \in \{0,\ldots,N\},\ i \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$
$$u_i^0 = \frac{1}{h_i}\int_{M_i} u_0(x)dx,\ i \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

1. (Stabilité L^∞) Montrer que $k \le \alpha h \Rightarrow |u_i^n| \le \|u_0\|_\infty$, $\forall n \in \{0,\ldots,N+1\}$, $\forall i \in \mathbb{Z}$.
2. (Estimation "BV faible") Soient $\zeta > 0$ et K un compact de $[0,T]\times\mathbb{R}]$. On note $Z_K = \{i \in \mathbb{Z}\,; x_i \in K\}$. Montrer que :
$$k \le (1-\zeta)\alpha h \Rightarrow \sum_{n\in\{0,\ldots,N+1\}} \sum_{i\in Z_K} k(u_i^n - u_{i-1}^n)^2 \le C,$$
où C ne dépend que de ζ, u_0 et K.
3. (Convergence) On pose $\mathcal{T} = (M_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et on définit la solution approchée sur $[0,T]\times\mathbb{R}$, $u_{\mathcal{T},k}$, donnée par (3),(4), par $u_{\mathcal{T},k}(t,x) = u_i^n$, si $x \in M_i$ et $t \in [t_n, t_{n+1}[$.
Montrer que $u_{\mathcal{T},k} \to u$, pour la topologie faible-etoile de $L^\infty(]0,T[\times\mathbb{R})$, quand $h \to 0$, avec $k \le (1-\zeta)\alpha h$ (ζ fixé).
Remarque : On peut aussi montrer (cf. la suite du cours...) que la convergence est forte dans $L^p_{loc}(]0,T[\times\mathbb{R})$, pour tout $p < \infty$.

Exercice 2 (Eq. non lin., convergence par la méthode “estimation BV”)
Soient $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $T > 0$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$; on cherche une approximation de la solution de l'equation hyperbolique avec condition initiale :

$$u_t(x,t) + (f(u))_x(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in [0,T],$$
$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

On note h (resp. $k = \frac{T}{N+1}$) le pas (constant, pour simplifier) de la discrétisation en espace (resp. en temps), et u_i^n la valeur approchée recherchée de u au temps nk dans la maille $M_i = [(i-\frac{1}{2})h, (i+\frac{1}{2})h]$, pour $n \in \{0,\ldots,N+1\}$ et $i \in \mathbb{Z}$. On considère le schéma obtenu par une discrétisation par volumes finis explicite à trois points :

$$h\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + (f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n) = 0,\ n \in \{0,\ldots,N\},\ i \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$
$$u_i^0 = \frac{1}{h}\int_{M_i} u_0(x)dx,\ i \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$

avec $f_{i+\frac{1}{2}}^n = g(u_i^n, u_{i+1}^n)$, où $g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. On étudie, dans cette question, le schéma de Godunov, c'est-à-dire que qu'on prend
$$g(a,b) = \min\{f(s),\ s \in [a,b]\} \text{ si } a \le b,$$
$$g(a,b) = \max\{f(s),\ s \in [a,b]\} \text{ si } a > b.$$

(a) Montrer que le schéma (5), (6) peut s'écrire :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + C_i(u_{i+1}^n - u_i^n) + D_i(u_{i-1}^n - u_i^n)$$

avec $C_i = \dfrac{k}{h}\dfrac{f(u_i^n) - g(u_i^n, u_{i+1}^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n} \geq 0$ et $D_i = \dfrac{k}{h}\dfrac{g(u_{i-1}^n, u_i^n) - f(u_i^n)}{u_{i-1}^n - u_i^n} \geq 0$.

(b) On pose $A = \|u_0\|_\infty$, $M = \sup_{s\in[-A,A]} |f'(s)|$, et h le pas (constant) d'espace. On suppose que k et h vérifient la condition

$$k \leq \frac{h}{2M}. \tag{7}$$

On note u^n la fonction définie par : $u^n(x) = (u_i^n)$ si $x \in M_i$; montrer que, pour tout n,

$$(\text{Stabilité } L^\infty)\ \|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty, \tag{8}$$
$$(\text{Stabilité } BV)\ \|u^n\|_{BV} \leq \|u^0\|_{BV}. \tag{9}$$

On rappelle que, comme u^n est une fonction constante par morceaux, on a :

$$\|u^n\|_{BV} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} |u_{i+1}^n - u_i^n|.$$

(c) Montrer, avec la condition (7), la convergence du schéma de Godunov.

2. On suppose maintenant $f(u) = u$ et on prend $g(a,b) = (a+b)/2$ (schéma centré).
Montrer que pour tout couple k, h, les inégalités (8) et (9) sont fausses, c'est-à-dire qu'il existe $u_0 (\in L^\infty \cap BV)$ t.q. $\|u^1\|_\infty \not\leq \|u^0\|_\infty$, et $\|u^1\|_{BV} \not\leq \|u^0\|_{BV}$.

3. On étudie maintenant un schéma de type "MUSCL". On suppose que $f' \geq 0$ et on prend dans le schéma (5) $f_{i+\frac{1}{2}}^n = f(u_i^n + \frac{h}{2}p_i^n)$, où :

$$p_i^n = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_i^n}{2h}\min\bigl(|u_{i+1}^n - u_{i-1}^n|, \quad 4|u_{i+1}^n - u_i^n|, 4|u_i^n - u_{i-1}^n|\bigr), \text{ où } \varepsilon_i^n = \text{sign}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \\ \qquad\qquad \text{si sign}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) = \text{sign}(u_{i+1}^n - u_i^n) = \text{sign}(u_i^n - u_{i-1}^n) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

(a) Montrer que $\frac{1}{h}(f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n)$ est une approximation d'ordre 2 de $\bigl(f(u)\bigr)_x(x_i, t_n)$ aux points où $u \in C^2$ et $u_x \neq 0$.

(b) Montrer que sous une condition de type $k \leq Ch$, où C ne dépend que de u_0 et f, les inégalités (8) et (9) sont vérifiées.

Exercice 3 (Problème de Riemann)
Soient $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u_g \in \mathbb{R}$ et $u_d \in \mathbb{R}$. On considère le problème suivant :

$$u_t(x,t) + (f(u))_x(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in [0, \infty[,$$
$$u(x,0) = u_g, \text{ pour } x < 0, u(x,0) = u_d, \text{ pour } x > 0.$$

On admet le théorème d'existence et d'unicité de la solution entropique. On note u cette solution (on rappelle, en particulier, que $u \in C([0,\infty[, L^1_{loc}(\mathbb{R}))$, et que $u(.,t) \in [u_g, u_d]$ (ou $[u_d, u_g]$), p.p., pour tout $t \in [0,\infty[$).

1. On suppose que f est convexe, calculer u.
2. On admet que u est une "fonction de x/t", et est "continue par morceaux". On note $u^\star$ la valeur de $u(0,t)$ (indépendante de t) (en supposant qu'elle existe, sinon on prend $u(0^+,t)$ ou $u(0^-,t)$). Montrer que $(u^\star - u_g)(f(u^\star) - f(u_g)) \leq 0$ et que $(u^\star - u_d)(f(u^\star) - f(u_d)) \geq 0$.

Exercice 4 (Stabilité de schémas numériques)
Soient $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $T \in \mathbb{R}_+^\star$. On considère le problème suivant :

$$u_t(x,t) + (f(u))_x(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in [0,T], \tag{10}$$
$$u(x,0) = u_0(x). \tag{11}$$

On utilise ci dessous les notations du cours.

1. On discrétise le problème (10),(11) par le schéma de Rusanov (vu en cours). Montrer qu'il existe M (dépendant de f et u_0) tel que (8) et (9) sont vraies (pour tout n) si $M\frac{k}{h} \leq 1$
2. On discrétise le problème (10),(11) par l'un des schémas de décomposition de flux vus en cours. Montrer qu'il existe M (dépendant de f_1 f_2 et u_0) tel que (8) et (9) sont vraies (pour tout n) si $M\frac{k}{h} \leq 1$.
3. On discrétise le problème (10),(11) par le schéma de Murman-Roe (vu en cours). Montrer qu'il existe M (dépendant de f et u_0) tel que (8) et (9) sont vraies (pour tout n) si $M\frac{k}{h} \leq 1$.
4. On suppose ici que $f(s) = s$, pour tout $s \in \mathbb{R}$. On discrétise le problème (10),(11) par le schéma de Lax-Wendroff (vu en cours). Montrer que si, $\frac{k}{h} \leq 1$, on a (pour tout n) l'estimation (8) avec la norme euclidienne au lieu de la norme infini.

   Montrer que, pour tout k et h, il existe u_0 tel que $\|u^1\|_\infty > \|u^0\|_\infty$.

Exercice 5 (Convergence de VFDA avec la méthode "BV-faible", f croissante)
Soient $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $T > 0$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, on suppose que f est croissante et que $A \leq u_0 \leq B$, p.p.. On cherche une approximation de la solution de l'equation hyperbolique avec condition initiale :

$$u_t(x,t) + (f(u))_x(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in [0,T], \tag{12}$$
$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

On se donne un pas de temps, k, avec $k = \frac{T}{N+1}$ ($N \in \mathbb{N}$), et on pose $t_n = nk$, pour $n \in \{0, \ldots, N+1\}$; On se donne des points de discrétisations en espace, $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, et on suppose que x_i est le centre de la maille $M_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, pour $i \in \mathbb{Z}$. On pose $h_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ et $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On suppose que, pour un certain $h \in \mathbb{R}$, $\alpha h \leq h_i \leq \beta h$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On considère le schéma (14),(15) (appelé VFDA) :

$$h_i \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + (f^n_{i+\frac{1}{2}} - f^n_{i-\frac{1}{2}}) = 0,\ n \in \{0, \ldots, N\},\ i \in \mathbb{Z}, \tag{14}$$
$$u_i^0 = \frac{1}{h}\int_{M_i} u_0(x)dx,\ i \in \mathbb{Z}, \tag{15}$$

avec $f^n_{i+\frac{1}{2}} = f(u_i^n)$.
On pose $M = \sup\{f'(s);\ A \leq s \leq B\}$.

1. (Stabilité L^∞) On suppose que $M\frac{k}{h} \leq 1$, montrer que $A \leq u_i^n \leq B$, pour tout n et i.
2. (Estimation "BV faible") Soient $\zeta > 0$ et K un compact de $[0,T] \times \mathbb{R}]$. On note $Z_K = \{i \in \mathbb{Z}\,; x_i \in K\}$. Montrer que :
$$k \leq (1-\zeta)\alpha h \Rightarrow \sum_{n\in\{0,\ldots,N+1\}} \sum_{i \in Z_K} k(f(u_i^n) - f(u_{i-1}^n))^2 \leq C,$$
   où C ne dépend que de ζ, f, u_0 et K.
3. Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R}\times]0,T[\times]0,1[$. On suppose que $u_{\mathcal{T},k} \to u$, quand $h \to 0$, avec $k \leq (1-\zeta)\alpha h$ ($\zeta > 0$ est fixé) au sens suivant :
$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} g(u_{\mathcal{T},k}(x,t))\varphi(x,t)dxdt \to \int_0^1 \int_0^T \int_{\mathbb{R}} g(u(x,t,a))\varphi(x,t)dxdtda, \forall \varphi \in L^1(\mathbb{R}\times]0,T[).$$
   Montrer que u vérifie, pour tout $\eta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, convexe, et ϕ t.q. $\phi' = \eta' f'$:
$$\int_0^1 \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\eta(u(x,t,a))\varphi_t(x,t) + \phi(u(x,t,a))\varphi_x(x,t))dxdtda + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x))\varphi(x,0)dx \geq 0, \tag{16}$$
$$\forall \varphi \in C^1([0,T[\times\mathbb{R}, \mathbb{R}_+).$$
4. Montrer que $u_{\mathcal{T},k} \to u$, quand $h \to 0$, avec $k \leq (1-\zeta)\alpha h$ ($\zeta > 0$ est fixé), dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}\times]0,T[)$, pour tout $p < \infty$, où est la solution entropique de (12)-(13).

   [On admettra que si u est solution de (16) alors u ne dépend pas de a.]