# M2 Mathématiques et Applications, Parcours EDPCS

**Année universitaire 2017/2018**

**EDP hyperboliques, TD 3**

On se propose ici de démontrer la convergence d'un schéma de type "Volumes Finis" pour une équation hyperbolique en deux dimensions d'espace avec une discrétisation spaciale utilisant des triangles.
On considère le problème suivant :

$$u_t(x,t) + \mathrm{div}(\mathbf{v} f(u(x,t))) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^2,\ t \in [0,T] \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{2}$$

avec $T > 0$ et les hypothèses suivantes sur les données $T$, $\mathbf{v}$, $f$, $u_0$ :

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in C^1(\mathbb{R}^2 \times [0,T], \mathbb{R}^2), \tag{3}$$

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,T]} |\mathbf{v}(x,t)| = V < +\infty, \tag{4}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{v}(x,t) = \sum_{i=1}^{2} \partial_{x_i} v_i(x,t) = 0, \text{ for all } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,T], \tag{5}$$

$$u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^2), \tag{6}$$

$$f = f_1 + f_2,\ f_1, f_2 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f_1'(s) \geq 0,\ f_2'(s) \leq 0,\ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Soient $\mathcal{T}$ un maillage formé de triangles et $k$ un pas de temps (supposé constant). Soit $N \in \mathbb{N}$ t.q. $(N-1)k < T \leq Nk$. On discrétise (1)-(2) avec le schéma d'Euler explicite en temps et un schéma de Volumes Finis en espace. Les inconnues discrètes sont $u_K^n$, $n \in \{0, \ldots, N\}$, $K \in \mathcal{T}$, données par le schéma numérique (8)-(9) (décrit ci-dessous). Soit $K \in \mathcal{T}$, on note $S(K)$ la surface du triangle $K$, $\mathcal{T}_K$ les trois triangles de $\mathcal{T}$ ayant un côté commun avec $K$, $a_{K,K_v}$ le côté commun à $K$ et $K_v$ (quand $K_v \in \mathcal{T}_K$), et $\mathbf{n}_K$ la normale à la frontière de $K$, extérieure à $K$. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des côtés du maillage ; pour $a \in \mathcal{A}$, $l(a)$ est la longueur de $a$, $\mathbf{n}_a$ un vecteur normal à $a$, $K_a^1$ et $K_a^2$ les deux triangles de $\mathcal{T}$ ayant $a$ pour côté. On peut maintenant définir le schéma numérique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} S(K) + \sum_{K_v \in \mathcal{T}_K} (\int_{a_{K,K_v}} (\mathbf{v}.\mathbf{n}_K)^+ d\sigma)(f_1(u_K^n) + f_2(u_{K_v}^n)) \\ -(\int_{a_{K,K_v}} (\mathbf{v}.\mathbf{n}_K)^- d\sigma)(f_2(u_K^n) + f_1(u_{K_v}^n)) = 0, \\ \qquad\qquad \forall K \in \mathcal{T},\ \forall n \in \{0, \ldots, N-1\}, \end{array} \right. \tag{8}$$

$$u_K^0 = \frac{1}{S(K)} \int_K u_0(x)dx, \qquad \forall K \in \mathcal{T}. \tag{9}$$

Dans (8), $d\sigma$ désigne la mesure de Lebesgue 1-dimensionnelle sur la frontière de $K$.
La solution approchée au temps $t_n$ est définie par : $u^n(x) = u_K^n$ si $x \in K$. La solution approchée est définie sur $\mathbb{R}^2 \times [0,T]$ par :

$$u_{\mathcal{T},k}(x,t) = u^n(x), \quad \text{for} \quad t \in [nk, (n+1)k[, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{10}$$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ fixés. On suppose qu'il existe $h \in \mathbb{R}_+^*$, (le pas d'espace) satisfaisant :

$$\left\{\begin{array}{llll} \alpha h^2 & \leq & S(K) & \leq \beta h^2, \quad \forall \;\; K \in \mathcal{T}, \\ \\ \alpha h & \leq & l(a) & \leq \beta h, \quad \forall \;\; a \in \mathcal{A}. \end{array}\right. \tag{11}$$

On suppose que le pas de temps vérifie alors la condition (de stabilité) :

$$k \leq \frac{\alpha h}{2\beta \quad V \quad 2M}(1-\zeta), \tag{12}$$

où $\zeta > 0$ est donné, $M = \sup(M_1, M_2)$, $M_1 = \sup(f_1'(s), s \in [A,B])$, $M_2 = \sup(-f_2'(s), s \in [A,B])$, avec $A, B$ t.q. $A \leq u_0 \leq B$ p.p. dans $\mathbb{R}^2$.

1. (Stabilité $L^\infty$)
   Soient $\mathbf{v}$, $f$ et $u_0$ satisfaisant (3)-(7), et $\mathcal{T}$, $k$ satisfaisant (11) et (12). Soient $u_K^n$ et $u_{\mathcal{T},k}$ définis par (8)-(9) et (10). Montrer que :

$$\min_{K \in \mathcal{T}} u_K^n \leq \min_{K \in \mathcal{T}} u_K^{n+1} \leq \max_{K \in \mathcal{T}} u_K^{n+1} \leq \max_{K \in \mathcal{T}} u_K^n, \quad \forall \;\; n \in \{0, \ldots, N-1\}, \tag{13}$$

   en déduire :

$$\|u_{\mathcal{T},k}\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty. \tag{14}$$

   ($\|.\|_p$ est la norme usuelle dans $L^p(\mathbb{R}^2)$ ou $L^p(\mathbb{R}^2 \times [0,T])$, pour $1 \leq p \leq \infty$.)
   Ce résultat est encore vrai avec $\zeta = 0$ dans la condition (12).
2. (Estimation "BV-faible")
   Soient $\mathbf{v}$, $f$ et $u_0$ satisfaisant (3)-(7), et $\mathcal{T}$, $k$ satisfaisant (11) et (12). Soient $u_K^n$ et $u_{\mathcal{T},k}$ définis par (8)-(9) et (10). Soit $r \geq 0$. Montrer qu'il existe $C_r > 0$, dépendant seulement de $f, u_0$, $\zeta$ et $r$ t.q. :

$$\sum_{n=0}^{N} k \sum_{a \in \mathcal{A}_r} (\int_a |\mathbf{v}.\mathbf{n}_a| d\sigma)((f_1(u^n_{K_a^1}) - f_1(u^n_{K_a^2}))^2 + (f_2(u^n_{K_a^1}) - f_2(u^n_{K_a^2}))^2) \leq C_r, \tag{15}$$

   où $\mathcal{A}_r = \{a \in \mathcal{A}$, t.q. $a \subset B(0,r)\}$, $B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\| \leq r\}$.
   [Pour montrer ce résultat, on pourra procéder ainsi :
   Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$, à support compact, t.q. $0 \leq \varphi \leq 1$, et $\varphi = 1$ dans $K$ si $K \cap B(0,r) \neq \emptyset$. On note $\varphi_K$ la valeur moyenne de $\varphi$ dans $K$. On définit $F_1$ et $F_2$ par : $F_1(\xi) = \int_0^\xi s f_1(s) ds$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $F_2(\xi) = \int_0^\xi s f_2(s) ds$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$.
   En multipliant (8) par $u_K^n \varphi_K$ et en utilisant div$\mathbf{v} = 0$ montrer que :

$$\left\{\begin{array}{l} (\frac{(u_K^{n+1} - u_K^n)^2}{2k} + \frac{(u_K^{n+1})^2}{2k} - \frac{(u_K^n)^2}{2k}) S(K) \varphi_K \\ + \sum_{K_v \in \mathcal{T}_K} (\int_{a_{K,K_v}} (\mathbf{v}.\mathbf{n}_K)^+) \varphi_K (F_2(u^n_{K_v}) - F_2(u^n_K) + \int_{u^n_K}^{u^n_{K_v}} (u^n_K - s) f_2'(s) ds) \\ - \sum_{K_v \in \mathcal{T}_K} (\int_{a_{K,K_v}} (\mathbf{v}.\mathbf{n}_K)^-) \varphi_K (F_1(u^n_{K_v}) - F_1(u^n_K) - \int_{u^n_K}^{u^n_{K_v}} (u^n_K - s) f_1'(s) ds) \quad = 0. \end{array}\right. \tag{16}$$

   En utilisant le fait que $\int_a^b f_1'(s)(b-s) ds \geq \frac{1}{2M_1}(f_1(b) - f_1(a))^2$, si $a, b \in [A,B]$ (et la propriété analogue pour $f_2$), montrer (15).]
3. (Passage à la limite)
   On admet ici le résultat suivant :

**Proposition 1.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}^2\times]0,T[)$. Il existe alors une sous suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe $\mu \in L^\infty(\mathbb{R}^2\times]0,T[\times]0,1[)$ t.q. pour toute fonction $g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ on ait :*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2\times]0,T[} g(u_n(x,t))\varphi(x,t)dxdt = \int_{\mathbb{R}^2\times]0,T[\times]0,1[} g(\mu(x,t,\alpha))\varphi(x,t)dxdtd\alpha, \tag{17}$$

*pour toute fonction $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^2\times]0,T[)$.*

On suppose que les hypothèses (3)-(7) sont vérifiées. Soit $(\mathcal{T}_i,k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de maillages et de pas de temps satisfaisant (11) et (12), montrer qu' il existe une sous suite, encore notée $(\mathcal{T}_i,k_i)_{i\in\mathbb{N}}$, et $\mu \in L^\infty(\mathbb{R}^2\times]0,T[\times]0,1[)$ t.q. :

(a) La solution approchée définie par (8)-(9) et (10), c.a.d. $u_{\mathcal{T}_i,k_i}$, converge vers $\mu$ au sens suivant :

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2\times]0,T[} g(u_{\mathcal{T}_i,k_i}(x,t))\varphi(x,t)dxdt = \int_{\mathbb{R}^2\times]0,T[\times]0,1[} g(\mu(x,t,\alpha))\varphi(x,t)dxdtd\alpha, \tag{18}$$

pour tout $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^2\times]0,T[)$.

(b) $\mu$ est une "solution processus entropique" de (1)-(2), c.a.d. que $\mu$ vérifie :

$$\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2}\int_0^T\int_0^1\Big(\eta(\mu(x,t,\alpha))\varphi_t(x,t)+\Phi(\mu(x,t,\alpha))\mathbf{v}(x,t).\mathbf{grad}\varphi(x,t)\Big)d\alpha dtdx \ + \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2}\eta(u_0(x))\varphi(x,0)dx \geq 0, \\ \forall\ \ \varphi\in C_c^1(\mathbb{R}^2\times[0,T[,\mathbb{R}_+),\end{array} \tag{19}$$

pour toute fonction, $\eta$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, convexe et de classe $C^1$, et $\Phi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction t.q. $\Phi' = f'\eta'$.

Indications :

La première partie du résultat précédent (c.a.d. la convergence vers $\mu$) est une conséquence de (14) et de la proposition 1. Pour démontrer la deuxième partie, on pourra procéder ainsi :

(a) (Equation) Montrer (19) avec $\eta(s) = s$ (pour tout $s \in \mathbb{R}$), $=$ au lieu de $\geq$ et $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^2\times[0,T[,\mathbb{R})$. Pour ceci on multiplie (8) (avec $k = k_i$, et $\mathcal{T} = \mathcal{T}_i$) par $u_K^n\varphi(x,t_n)$, avec $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2\times[0,T[,\mathbb{R}_+)$ donné et on passe à la limite quand $i\to\infty$ en utilisant, en particulier, (15).

(b) (Entropies) Montrer (19) dans le cas général. Pour ceci, soient $\eta \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction convexe et $\Phi_1,\Phi_2 \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, t.q. $\Phi_1' = \eta' f_1'$ et $\Phi_2' = \eta' f_2'$. On pose $k = k_i$ et $\mathcal{T} = \mathcal{T}_i$. Montrer que (ceci n'est pas facile...) :

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\eta(u_K^{n+1})-\eta(u_K^n)}{k}S(K)+\sum_{K_v\in\mathcal{T}_K}(\int_{a_{K,K_v}}(\mathbf{v}.\mathbf{n}_K)^+d\sigma)(\Phi_1(u_K^n)+\Phi_2(u_{K_v}^n)) \\ -(\int_{a_{K,K_v}}(\mathbf{v}.\mathbf{n}_K)^-d\sigma)(\Phi_2(u_K^n)+\Phi_1(u_{K_v}^n)) \leq 0, \\ \qquad\qquad\qquad \forall K\in\mathcal{T},\ \forall n\in\{0,\ldots,N-1\}.\end{array}\right. \tag{20}$$

On multiplie alors (20) (avec $k = k_i$ et $\mathcal{T} = \mathcal{T}_i$) par $\varphi(x,t_n)$, avec une fonction donnée $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2\times[0,T[,\mathbb{R}_+)$ et on passe à la limite quand $i\to\infty$ en utilisant, en particulier, (15).

4. (Convergence)

On admet ici le résultat (d'unicité) suivant :

**Théorème 1.** *Sous les hypothèses (3)-(7), il existe une unique solution processus entropique* $\mu$ *de (1)-(2) (c.a.d. satisfaisant (19)). De plus, il existe une fonction* $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2 \times ]0,T[)$ *t.q.* $u(x,t) = \mu(x,t,\alpha)$, *p.p. en* $(x,t,\alpha) \in \mathbb{R}^2 \times ]0,T[\times]0,1[$. *La fonction* $u$ *est donc l'unique solution faible entropique de (1)-(2).*

On suppose que les hypothèses (3)-(7) sont satisfaites. Soit $u$ l'unique solution faible entropique de (1)-(2). Soit $(k, \mathcal{T})$ satisfaisant (11) et (12) ($\alpha$, $\beta$, et $\zeta$ sont fixés). On définit $u_{\mathcal{T},k}$ par (8)-(9) et (10). Montrer que $u_{\mathcal{T},k} \to u$, dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)$ pour tout $p \in [1, \infty[$, quand $h \to 0$.

Noter que la méthode étudiée ici permet aussi de démontrer l'existence et l'unicité de la solution faible entropique de (1)-(2).