M2 Mathématiques et Applications, Parcours EDPCS

Année universitaire 2017/2018

EDP hyperboliques, TD 4

On considère, dans cet exercice, le système des équations de Saint Venant à une dimension d'espace, c'est-à-dire le système suivant :

$$\partial_t h(x,t) + \partial_x (hu)(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$\partial_t (hu)(x,t) + \partial_x (hu^2 + \alpha h^2)(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

où α est un nombre donnée, $\alpha > 0$ (on pourra se limiter à étudier le cas $\alpha = \frac{1}{2}$).
Les inconnues de ce système sont les fonctions $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^\star$ et $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. On introduit 2 nouvelles inconnues, q et c, définies par $q = hu$ et $c = \sqrt{2\alpha h}$ (noter donc que $c : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^\star$ et $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$). On note également $U = \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} u \\ 2c \end{bmatrix}$, $p = \alpha h^2$ et $D = \left\{ \begin{bmatrix} h \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ h > 0 \right\}$.

1. (Forme équivalente) En définissant $F : D \to \mathbb{R}^2$ convenablement, montrer que le système (1)-(2) sécrit aussi
$$\partial_t U(x,t) + \partial_x (F(U))(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+. \tag{3}$$

Dans toute la suite F est la fonction définie dans cette première question.

2. (Hyperbolicité) Pour tout $U \in D$, calculer les valeurs propres de la matrice jacobienne de F au point U et donner une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de cette matrice jacobienne. Montrer que le système (3) est strictement hyperbolique dans le domaine D.
3. (Nature des champs) Montrer que les deux champs du système (3) sont VNL (c'est-à-dire Vraiment Non Linéaire) dans tout le domaine D.
4. (Invariants) Calculer les invariants de Riemann associés à chacun des deux champs du sytème (3).
5. (Entropie) Pour tout $U = \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix} \in D$, on pose $\eta(U) = \frac{1}{2} hu^2 + p$ (on rappelle que $q = hu$ et $p = \alpha h^2$). Montrer que $\eta(U)$ est une entropie du système, c'est-à-dire que η est convexe et qu'il existe une fonction Φ telle que $\partial_t \eta(U) + \partial_x(\Phi(U)) = 0$ pour toute solution régulière de (1)-(2) (et donc de (3)).
6. (Limite de solutions visqueuses) On ajoute des termes de régularisation dans le système (1)-(2), c'est-à-dire $-\varepsilon h_{xx}$ pour la première équation et $-\varepsilon u_{xx}$ pour la deuxième équation (avec $\epsilon > 0$). On note h_ε et u_ε les solutions de ce nouveau système. On suppose que ce sont des fonctions régulières, bornées (pour $\varepsilon > 0$) dans $L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ et qu'elles convergent dans $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, quand $\varepsilon \to 0$, vers des fonctions h et u (avec $h > 0$). Montrer que le couple (h,u) est solution de (1)-(2) et vérifie, au sens des distributions,
$$\partial_t \eta(U) + \partial_x(\Phi(U)) \le 0.$$
7. (Forme équivalente de (1)-(2) pour des solutions régulières) Soit (h,u) une solution régulière de (1)-(2). Montrer que $V = \begin{bmatrix} u \\ 2c \end{bmatrix}$ est solution du système
$$V_t(x,t) + B(V)V_x(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+,\ \text{avec } B(V) = \begin{bmatrix} u & c \\ c & u \end{bmatrix}. \tag{4}$$

On s'intéresse maintenant au problème de Riemann, c'est-à-dire au système (1)-(2) (équivalent à (3)) avec la condition initiale

$$h(x,0) = h_g,\ u(x,0) = u_g,\ x < 0, \tag{5}$$

$$h(x,0) = h_d,\ u(x,0) = u_d,\ x > 0, \tag{6}$$

où h_g, $h_d \in \mathbb{R}_+^\star$ et u_d, $u_g \in \mathbb{R}$ sont donnés. On pose $q_g = h_g u_g$, $q_d = h_d u_d$, $c_g = \sqrt{2\alpha h_g}$, $c_d = \sqrt{2\alpha h_d}$.
On suppose que $u_d - u_g < 2(c_g + c_d)$ (cette condition est nécessaire pour que le problème (3), (5)-(6) ait une solution prenant ses valeurs dans D, c'est la condition de "non apparition du vide").

8. (Deux détentes) On suppose, dans cette question, que $2|c_g - c_d| \leq u_d - u_g$. Construire la solution du problème de Riemann (3), (5)-(6). [Cette solution est formée de 2 détentes reliées par un état "intermédiaire", noté $(h_\star, u_\star)$, avec $h_\star > 0$. On pourra chercher la solution dans les zones de détente avec u et c sous la forme de fonctions affines de x/t.]
9. (Autres cas, question difficile) On suppose, dans cette question, que $2|c_g - c_d| > u_d - u_g$ et on pose

$$S = \sqrt{\frac{\alpha(h_g - h_d)(h_g^2 - h_d^2)}{h_g h_d}}.$$

   Construire la solution du problème de Riemann (3), (5)-(6) dans les trois cas suivants :
   (a) $u_g - u_d < S$, $h_d \leq h_g$. [La solution est formée avec une 1-détente et un 2-choc.]
   (b) $u_g - u_d < S$, $h_g < h_d$. [La solution est formée avec un 1-choc et une 2-détente.]
   (c) $u_g - u_d \geq S$. [La solution est formée avec un 1-choc et un 2-choc.]
10. (Problème de Riemann linéarisé) On pose $\overline{V} = \begin{bmatrix} \overline{u} \\ 2\overline{c} \end{bmatrix}$, $\overline{u} = (u_g + u_d)/2$ et $\overline{c} = (c_g + c_d)/2$.

    On remplace dans le problème de Riemann (3), (5)-(6), l'équation (3) par l'équation suivante :

$$\partial_t V(x,t) + B(\overline{V})\partial_x V(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+. \tag{7}$$

    Contruire la solution du problème (7), (5)-(6).
    N.B. : On remarque que, grâce à la condition $u_d - u_g < 2(c_g + c_d)$, ce nouveau problème de Riemann admet une solution avec un état intermédiaire $(u_\star, 2c_\star)$ t.q. $c_\star > 0$, et donc $c_\star = \sqrt{2\alpha h_\star}$ avec un $h_\star > 0$. (Ceci n'est pas le cas si $u_d - u_g \geq 2(c_g + c_d)$.) Ce fait que $h_\star > 0$ est important lorsque que l'on remplace dans le schéma de Godunov la résolution du problème de Riemann par la résolution de ce problème de Riemann linéarisé.