M2 Mathématiques et Applications, Parcours EDPCS
Année universitaire 2017/2018
EDP hyperboliques, TP 1

Exercice 1 (Equation de Burgers)
Soit $\Omega =]a,b[$, $a < b$. On considère dans cet exercice l'équation de Burgers avec une condition initiale, notée u_0, et des conditions aux limites (en a et b), notées $\overline{u}$ et $\overline{\overline{u}}$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
&u_t + (u^2)_x = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+^\star,\\
&u(\cdot, 0) = u_0 \text{ dans } \Omega,\\
&u(a, \cdot) = \overline{u} \text{ dans } \mathbb{R}_+^\star,\\
&u(b, \cdot) = \overline{\overline{u}} \text{ dans } \mathbb{R}_+^\star.
\end{aligned}$$

Pour chacun des choix faits ci dessous pour a, b, u_0, $\overline{u}$, $\overline{\overline{u}}$ et T, on demande de calculer la solution approchée obtenue par le schéma de Godunov avec un pas d'espace uniforme et $CFL = 1$ à l'instant T. Pour les 4 premiers exemples, on demande aussi de calculer la solution exacte et de donner l'ordre de convergence (en norme L^1).

1. Dans cette question, $a = 0$, $b = 3$, $\overline{u} = 1$, $\overline{\overline{u}} \geq 0$, $T = 1$ et
$$u_0(x) = 1 - x \text{ si } 0 < x < 1,\ u_0(x) = 0 \text{ si } x > 1.$$
2. Dans cette question, $a = 0$, $b = 3$, $\overline{u} = 0$, $\overline{\overline{u}} \geq 0$, $T = 1$ et
$$u_0(x) = 1 - x \text{ si } 0 < x < 1,\ u_0(x) = 0 \text{ si } x > 1.$$
3. Dans cette question, $a = 0$, $b = 3$, $\overline{u} = 0$, $\overline{\overline{u}} \geq 0$, $T = 1$ et
$$u_0(x) = x \text{ si } 0 < x < 1,\ u_0(x) = 0 \text{ si } x > 1.$$
4. Dans cette question, $a = -1$, $b = 8$, $\overline{u} = 1$, $\overline{\overline{u}} \geq 0$, $T = 2$ et $T = 7$ et
$$u_0(x) = 0 \text{ si } -1 < x < 0,\ u_0(x) = 2 \text{ si } 0 < x < 1, u_0(x) = 0 \text{ si } 1 < x < 8.$$
5. Dans cette question, $a = 0$, $b = 1$, $\overline{u} = 1$, $\overline{\overline{u}} = -2$, $T = 2$ et $u_0 = 0$.

Exercice 2 (Equation de Buckley-Leverett)
On souhaite, dans cet exercice, comparer différentes discrétisations d'un problème hyperbolique (à une dimension d'espace) issu de la simulation numérique de la récupération assistée d'hydrocarbures.
On se donne $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ et 2 fonctions régulières, f_1 et f_2, de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f_1(0) = 0$, f_1 croissante, $f_2(1) = 0$ et f_2 décroissante. On pose $f = \frac{(\alpha+\beta f_2)f_1}{f_1+f_2}$. On suppose que $I =]0,1[$, $T > 0$ et on se donne $u_0 \in L^\infty(I)$, $0 \leq u_0 \leq 1$ p.p.. On ajoute deux conditions aux limites, en 0 et en 1, notées $\overline{u}$ et $\overline{\overline{u}}$, qui sont dans l'intervalle $[0,1]$.
On s'intéresse au problème

$$u_t(x) + (f(u))_x = 0,\ x \in I,\ t > 0, \tag{1}$$
$$u(\cdot, 0) = u_0,\ x \in I, \tag{2}$$
$$u(0,t) = \overline{u},\ u(1,t) = \overline{\overline{u}},\ t > 0. \tag{3}$$

Ce problème admet une unique solution faible entropique (voir le cours, en particulier pour la prise en compte des conditions aux limites). On cherche à calculer de manière approchée cette solution à l'instant T donné.
Pour discrétiser ce problème, on utilise un maillage uniforme de pas $h = 1/N$ ($N \in \mathbb{N}^\star$) en espace et de pas $k = T/M$ ($M \in \mathbb{N}^\star$) en temps. Les inconnues discrètes sont notées u_i^n, $i \in \{1, \ldots, N\}$ et $n \in \{0, \ldots, M\}$. La quantité u_i^n est censée approcher les valeurs de $u(x,t)$ pour $x \in]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$ et $t \in [t_n, t_{n+1}[$, avec $x_{i+\frac{1}{2}} = ih$ et $t_n = nk$. Les schémas numériques que nous allons étudier sont de la forme (volumes finis explicites) :

$$h\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n = 0,\ i \in \{1, \ldots N\},\ n \in \{0, \ldots, M-1\}, \tag{4}$$
$$u_i^0 = \frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_0(x)dx,\quad i \in \{1, \ldots N\}. \tag{5}$$

La quantité $f_{i+\frac{1}{2}}^n$ est donc censée être une approximation de $f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n))$. On pose $\frac{k}{h} = \lambda$. Les schémas étant explicites, nous aurons dans la suite une limitation sur λ.

1. **Equation non linéaire,** $f' \geq 0$

   On prend ici $T = 1/2$, $f_1(s) = s^2$, $f_2(s) = \frac{(1-s)^2}{4}$ (pour tout $s \in [0,1]$), $\alpha = 1$ et $\beta = 0$. On a alors $f' \geq 0$ sur $]0,1[$ et on peut prolonger $f$de manière à avoir $f' \geq 0$ sur tout $\mathbb{R}$. Il est alors inutile de donner $\overline{\overline{u}}$ (la solution exacte ne dépend pas de $\overline{\overline{u}}$). Enfin, on prend $\overline{u} = 1$ et $u_0 = 0$.

   Calculer la solution approchée obtenue avec le schéma de Godunov (qui ici est le schéma décentré amont) avec $\lambda = 1/m$ et $\lambda = 1/(2m)$, $m = \max\{f'(s), s \in [0,1]\}$ (on pourra faire un calcul approché de m).

   Calculer la solution exacte (ce calcul a été fait en TD) et calculer l'ordre de convergence (en prenant des valeurs de N entre 100 et 1000).

2. **Equation non linéaire,** f' **change de signe**

   On prend ici $f_1(s) = s$, $f_2(s) = (1-s)$ (pour tout $s \in [0,1]$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$ (la fonction f est donc concave sur $]0,1[$), $u_0 = 1$, $\overline{u} = 3/4$, $\overline{\overline{u}} = 1$.

   Comparer pour $T = 1/2$ et $T = 4$, avec $\lambda = 1/(2m)$, $m = \alpha + \beta = 3$, les solutions approchées données par les 2 schémas obtenus en prenant les flux numériques suivants :

   (a) schéma “amont des pétroliers" : $g = g_P$, avec $g_P(a,b) = \frac{f_1(a)(\alpha+\beta f_2(a))}{f_1(a)+f_2(a)}$ si $-\alpha + \beta f_1(a) \leq 0$ et $g_P(a,b) = \frac{f_1(a)(\alpha+\beta f_2(b))}{f_1(a)+f_2(b)}$ si $-\alpha + \beta f_1(a) > 0$,

   (b) schéma de Godunov : $g = g_G$, $g_G(a,b) = \min\{f(c), c \in [a,b]\}$ si $a \leq b$ et $g_G(a,b) = \max\{f(c), c \in [a,b]\}$ si $a > b$.

   N.B. : Les deux schémas convergent vers l'unique solution entropique de (1)-(3).