

On considère le système des équations de Saint Venant à une dimension d'espace. La variable d'espace x appartient à $]0, 2[$ et la variable de temps t appartient à $]0, T[$, avec $T = 0.42$. Le système à résoudre est :

$$\partial_t h(x, t) + \partial_x(hu)(x, t) = 0, \quad x \in]0, 2[, \quad t \in]0, T[, \quad (1)$$

$$\partial_t(hu)(x, t) + \partial_x(hu^2 + \frac{1}{2}h^2)(x, t) = 0, \quad x \in]0, 2[, \quad t \in]0, T[. \quad (2)$$

A ce système, on ajoute des conditions initiales et des conditions aux limites :

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= 1, \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ h(x, 0) &= h_d, \quad u(x, 0) = 0, \quad 1 < x < 2, \\ h(0, t) &= 1, \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < t < T, \\ h(2, t) &= h_d, \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < t < T, \end{aligned}$$

où h_d est donné. On s'intéresse à deux choix possibles de h_d , $h_d = 0.01$ et $h_d = 0.4$.

1. Le choix des conditions initiales, des conditions aux limites et des intervalles de temps et d'espace choisis est tel que la solution est la même que celle qui serait obtenue en prolongeant les équations et les conditions aux limites sur tout \mathbb{R} . Ceci revient donc à étudier la solution d'un problème de Riemann. En utilisant le TD4, donner la nature des ondes attendues.

Pour discrétiser ce problème, on utilise un maillage en espace uniforme de $2N$ mailles (N variant entre 100 et 1000). Le pas de temps est choisi de manière à correspondre, pour chaque pas de temps, à $CFL = 1$ ou $CFL = 1/4$ (on demande de comparer ces deux choix de pas de temps).

2. Deux choix de flux sont à tester :

- (a) Le flux de Rusanov.
- (b) Le flux obtenu avec la variante du schéma de Godunov consistant à remplacer le problème de Riemann par le problème de Riemann linéarisé vu au TD4 (utilisant le système (1)-(2) écrit avec les inconnues u et $2c$). Avec ce deuxième choix, appelé "VFRoe-ncv", il est demandé d'utiliser la correction entropique vue en cours).

Pour ces deux choix de flux, comparer les solutions obtenues au temps T .

Dans le cas du schéma VFRoe-ncv, la correction entropique est-elle active ? Si oui, sur quelle onde est-elle active ? Comment est la solution sans la correction entropique ?