M2 Mathématiques et Applications, Parcours EDPCS

EDP hyperboliques, TP 1 : équation de Burgers

Soit $\Omega =]a, b[$, $a < b$. On considère l'équation de Burgers avec une condition initiale, notée u_0, et des conditions aux limites (en a et b), notées $\overline{u}$ et $\overline{\overline{u}}$, c'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
&\partial_t u + \partial_x(u^2) = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+^\star,\\
&u(\cdot, 0) = u_0 \text{ dans } \Omega,\\
&u(a, \cdot) = \overline{u} \text{ dans } \mathbb{R}_+^\star,\\
&u(b, \cdot) = \overline{\overline{u}} \text{ dans } \mathbb{R}_+^\star.
\end{aligned}
$$

Pour chacun des choix faits ci dessous pour a, b, u_0, $\overline{u}$, $\overline{\overline{u}}$ et T, on demande de calculer la solution approchée obtenue par le schéma de Godunov avec un pas d'espace uniforme et $CFL = 1$ à l'instant T.

Pour les 4 premiers exemples, on demande aussi de calculer la solution exacte et de donner l'ordre de convergence (en norme L^1).

1. Premier cas : $a = 0$, $b = 3$, $\overline{u} = 1$, $\overline{\overline{u}} \geq 0$, $T = 1$ et
$$u_0(x) = 1 - x \text{ si } 0 < x < 1,\ u_0(x) = 0 \text{ si } x > 1.$$

2. Deuxième cas :
$a = 0$, $b = 3$, $\overline{u} = 0$, $\overline{\overline{u}} \geq 0$, $T = 1$ et
$$u_0(x) = 1 - x \text{ si } 0 < x < 1,\ u_0(x) = 0 \text{ si } x > 1.$$

3. Troisième cas :
$a = 0$, $b = 3$, $\overline{u} = 0$, $\overline{\overline{u}} \geq 0$, $T = 1$ et
$$u_0(x) = x \text{ si } 0 < x < 1,\ u_0(x) = 0 \text{ si } x > 1.$$

4. Quatrième cas :
$a = -1$, $b = 8$, $\overline{u} = 1$, $\overline{\overline{u}} \geq 0$, $T = 2$ et $T = 7$ et
$$u_0(x) = 0 \text{ si } -1 < x < 0,\ u_0(x) = 2 \text{ si } 0 < x < 1, u_0(x) = 0 \text{ si } 1 < x < 8.$$

5. Cinquième cas :
$a = 0$, $b = 1$, $\overline{u} = 1$, $\overline{\overline{u}} = -2$, $T = 2$ et $u_0 = 0$.