ENSMM -Annaba

2020–2021

Examen d'Analyse Numérique- Juin 2021

Durée: 1h45

- **Calculettes sont authorisées.**
- **Les documents et téléphones sont interdits.**
- **Clarté de réponse est compatibilisée.**

Exercice 1. Considerons les noeuds $(x_i, f(x_i), f'(x_i))$ suivants : $(-\pi/2, -1, 0), (0, 0, 1), (\pi/2, 1, 0)$.

1. Calculer les polynomes de Lagrange L_0, L_1, L_2 associés aux points $x_0 = -\pi/2$, $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/2$.
2. Trouver la formulation de polynome d'interpolation de Hermite $H(x)$ passant par ces points en fonction de L_0, L_1, L_2.
   Indication : N'EST PAS necessaire de remplacer L_0, L_1, L_2 par ses expressions par contre il faut calculer les coefficients.
3. Donner une valeur approchée de $f(\pi/4)$.
4. Sachant que $f(x) = \sin x$. Calculer l'erreur $|H(\pi/4) - f(\pi/4)|$ avec deux manieres:
   (a) En calculant $H(\pi/4)$ et $f(\pi/4)$
   (b) En utiisant la formule de l estimation d'erreur.

Exercice 2. Pour $\alpha \in]-1, 1] \setminus \{0\}$, on considere la formule d'integration suivante :

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx \approx a_0 g(-1) + a_1 g'(-\frac{1}{2}) + a_2 g(\alpha). \tag{1}$$

1. Calculer les coefficients a_0, a_1, a_2 en fonction de α pour que cette formule d'approximation soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal á 2.
2. En utilisant un changement de variable convenable entre $[-1, 1]$ et $[0, 1]$, ecrire cette formule d'integration pour approximer $\int_0^1 f(t)dt$.
3. En utilisant cette formule d'integration, calculer des valeurs approchées dans le cas $\alpha = 1$ pour
   $$I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$
   et (en utlisant un changement de variable convenable entre $[1, +\infty)$ et $[0, 1]$)
   $$J = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$
4. Comparer les valeurs approchées obtenues dans la question precedente aux valeurs exactes de I et J.

Exercice 3. L'évolution de la concentration de certaines réactions chimiques au cours du temps peut être décrite par l'équation différentielle :

$$y'(t) = -\frac{1}{1+t^2} y(t), \quad t \in (0, 1)$$

avec

$$y(0) = 5.$$

1. Donner la formulation de schema d'Euler explicite.
2. Verifier la stabilité et la consistence. Deduire la convergence.
3. Déterminer la concentration a $t = 1$ a laide de la méthode d'Euler explicite avec un pas $h = 0.5$.