Université de Annaba–"Departement de Genie de Procedes"
Master 1-Genie Chimique **2019–2020**

Analyse Numerique

Les reponses doivent etre envoyées a l'adresse email: abdallah.bradji@gmail.com

Remarques Importantes:

- Les reponses doivent etre envoyées au plus tard Mercredi 23 Sept à 9h matin a l'adresse email suivante: `abdallah.bradji@gmail.com`
- Aucune reponse ne sera acceptée apres Mercredi 23 Sept à 9h matin.
- Si vous avez des questions, vous m'ecrivez via l'adresse email `abdallah.bradji@gmail.com`
- La presentation de la réponse est comptée sur 3pts

Exercice 1. Questions de cours.

1. Pour resoudre un probleme en Maths Appliquées, on suit quelques etapes en commençant de Phenomene Physique. Citer au moins trois etapes.
2. Quels sont les principes de la methode de differences finies.

Exercice 2. Questionnaire à choix multiples (QCM).

1. L'equation $u_t - u_{xx} = f$ represente l'un des phynomenes physiques (Choisir la bonne reponse):
   1-Diffusion de Chaleur
   2-Vibration d'Onde

2. Phynomene de Vibration peut etre modelisé par l'une des equations suivantes (Choisir la bonne reponse):
   1-$iu_t - u_{xx} = f$ avec $= \sqrt{-1}$.
   2-$u_{tt} - u_{xx} = f$

Exercice 3. Construire des approximations de Differences Finies pour les problemes suivants:

1. $$-u''(x) = f(x), \quad x \in (0,1) \tag{1}$$
   avec $u(0) = 1$ et $u(1) = -1$.
2. $$-u''(x) + u(x) = f(x), \quad x \in (0,1) \tag{2}$$
   avec $u(0) = u(1) = 0$.

Corrigé Examen

Barème

1. Exercice 1 : 3pt +3pt.
2. Exercice 2 : 1,5pt +1,5pt
3. Exercice 3 : 4pt+4pt
4. Presentation de copie: 3points

Solution Exercice 1.

1. Les etapes a suivre pour resoudre un probleme en Mathematiques Appliquees en commencant par le phynomene physique : Phynomene Physique, Modelisation, L'etude Mathematique, L'approximation Numerique, Programmation, Validation des Resultats
2. Les principes de la methode de Differences Finies : Subdivision de domaine par des points et l'approximation des derivees dans ces points de maillage.

Solution Exercice 2.

1. La reponse juste est le choix 1 : L'equation $u_t - u_{xx} = f$ respresente le phynomene de diffusion de chaleur.
2. La reponse juste est le choix 2 : Phynomene de vibration peut etre modelisé par l'equation $u_{tt} - u_{xx} = f$.

Solution Exercice 3.

Probleme 1. I will consider here the uniform mesh $h = 1/(M+1)$, with $M \in \mathbb{N}^\star$. The mesh points are denoted by, for $i = 0, \ldots, M+1$

$$x_i = ih \tag{3}$$

Replacing now x by x_i in (1) to get

$$-u_{xx}(x_i) = f(x_i). \tag{4}$$

The term $u_{xx}(x_i)$ can be approximated using the three point central scheme

$$\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2}. \tag{5}$$

We will have then the scheme:

$$-\frac{u^n_{i+1} - 2u^n_i + u^n_{i-1}}{h^2} = f(x_i), \qquad i = 1, \ldots, M \tag{6}$$

with

$$u_0 = 1 \quad \text{and} \quad u_{M+1} = -1.$$

The scheme (6) leads to the following linear system:

$$\frac{1}{h^2} AU = F, \tag{7}$$

where

$$U = (u_1, u_2, \ldots, u_M)^T, \tag{8}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

and

$$F = (f(x_1) + \frac{1}{h^2}, f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_{M-1}), f(x_M) - \frac{1}{h^2})^T. \tag{10}$$

Probleme 2. I will consider here the uniform mesh $h = 1/(M+1)$, with $M \in \mathbb{N}^{\star}$. The mesh points are denoted by, for $i = 0, \dots, M+1$

$$x_i = ih \tag{11}$$

Replacing now x by x_i in (2) to get

$$-u''(x_i) + u(x_i) = f(x_i). \tag{12}$$

The term $u_{xx}(x_i)$ can be approximated using the three point central scheme (5).
We will have then the scheme:

$$-\frac{u^n_{i+1} - 2u^n_i + u^n_{i-1}}{h^2} + u_i = f(x_i), \qquad i = 1, \dots, M \tag{13}$$

with $u_0 = u_1$ and $u_{M+1} = 0$.
The scheme (13) leads to the following linear system:

$$(\frac{1}{h^2}A + I)U = F, \tag{14}$$

where

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_M)^T, \tag{15}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

I is the identity matrix

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

and

$$F = (f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_M))^T. \tag{18}$$