

Série 3: Les Integrales Généralisées

Exercice 1. Etudier la nature des integrales généralisées suivantes et les calculer lorsqu'elles sont convergentes:

$$1. \int_{-1}^0 t^2 \ln |t| dt \quad 2. \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad 3. \int_0^{\infty} t^2 \exp(-t^2) dt$$

Exercice 2. Etudier la nature des integrales généralisées suivantes:

$$1. \int_1^{\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+2}} \quad 2. \int_0^1 \frac{\cos^2 t dt}{\sqrt[3]{1-t^2}}, \quad 3. \int_1^{\infty} \frac{\sin t dt}{t\sqrt{t}}, \quad 4. \int_1^{\infty} \sin(t^2) dt, \quad 5. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+t \sin t)}{|t \ln t|^\lambda} dt$$

$$6. \int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{t})}{\exp(\sin t) - 1} dt \quad 7. \int_2^{\infty} \frac{\sin(\pi t)}{\ln t} dt.$$

Exercice 3. Evaluer les integrales suivantes en utilisant les fonction gamma et bêta:

$$1. \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{3t-t^2}} \quad 2. \int_0^1 \ln^4 t dt, \quad 3. \int_0^{\infty} \frac{t dt}{1+t^6}, \quad 4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^5 t dt, \quad 5. \int_0^{\pi} \cos^4 t dt$$

Exercice 4.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}. \quad (1)$$

1. Trouver la l limite de la suite I_n
2. Donner une equivalent de $l - I_n$.
3. Justifier l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}. \quad (2)$$

4. Trouver la somme de cete serie sachant que

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (3)$$

Solution de l'Exercice

1. Pour calculer la limite l , on propose deux methodes differentes : l'une est basée sur l'utilisation de **Theoreme de convergence dominée (TCD)-Support de Cours, Page 25** avec condition de convergence uniforme locale (existe une version plus generale en utilisant la notion de convergence presque partout) et l'autre est basée sur une technique d'analyse de base.

(a) **First method (TCD)**: Considerons la suite de fonction f_n definie par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}, \quad x \in [0, 1].$$

On verifie les hypothese de **TCD**:

- Convergence uniforme locale. On prouve que f_n convergence uniformement localement sur $[0, 1[$ vers la fonction f définie par $f(x) = 1$ pour tout $x \in [0, 1[$. Soit $[0, \alpha] \subset [0, 1[$ et justifions la convergence uniforme (CU) sur $[0, \alpha]$. Nous avons

$$\sup_{x \in [0, \alpha]} |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha^n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

- f_n bornée par fonction g uniformément par rapport à n

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \forall x \in (0, 1).$$

avec $g \equiv 1$ qui vérifie

$$\int_0^1 g(x) dx = 1 < \infty.$$

On alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 dx = 1. \quad (4)$$

Donc

$$l = 1.$$

- (b) **Second method**: Il suffit d'utiliser le fait que

$$1 - x^n \leq \frac{1}{1 + x^n} \leq 1, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Donc

$$1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1.$$

Tendons n vers $+\infty$, on trouve $l = 1$.

2. Equivalence $1 - I_n$. Nous avons

$$1 - I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^n} dx. \quad (5)$$

Avec un changement de variable $t = x^n$, on trouve que

$$1 - I_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{n}}}{1+t} dt. \quad (6)$$

On utilise **TCD**, on trouve que (remarquant que $t^{\frac{1}{n}}$ convergence uniformement localement sur $]0, 1]$ vers la fonction 1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{n}}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} dt = \ln(2). \quad (7)$$

Par conséquent

$$1 - I_n \sim \frac{\ln(2)}{n}. \quad (8)$$

3. Considerons la fonction continue suivante:

$$\varphi(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad 0 < x \leq 1, \quad (9)$$

et

$$\varphi(0) = 1. \quad (10)$$

La fonction φ est développable en série entière au point $x_0 = 0$

$$\varphi(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n, \quad 0 \leq x < 1. \quad (11)$$

Considerons la série (somme partielle)

$$\varphi_n(x) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{m+1} x^m.$$

Comme φ_n converge uniformément localement, i.e. φ_n converge uniformément vers φ sur tout $[0, \alpha] \subset [0, 1]$. De plus, pour tout $0 < x < 1$

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x)| &= \frac{1}{x} \left| \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{m+1} x^{m+1} \right| \\ &\leq \frac{1}{x} \sum_{m=0}^n \frac{x^{m+1}}{m+1} \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x \left(\sum_{m=0}^n t^m \right) dt \\ &\leq \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{1-t} dt \end{aligned} \quad (12)$$

Donc

$$|\varphi_n(x)| \leq -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

La fonction $-\frac{\ln(1-x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 (la valeur en 0 vaut 1). La suite de fonctions $|\varphi_n|$ est bornée uniformément par rapport n sur $[0, 1]$. On peut alors appliquer **TCD** pour avoir

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx &= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \varphi_n(x) dx \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

4. Nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} &= \sum_{n \text{ est paire}} \frac{1}{(n+1)^2} - \sum_{n \text{ est impaire}} \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= T - \frac{1}{4}S \end{aligned} \quad (14)$$

avec

$$T = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

et

$$S = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Il reste à calculer T . Pour cette raison, on écrit

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n \text{ est paire}} \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{n \text{ est impaire}} \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= T + \frac{1}{4}S. \end{aligned} \quad (15)$$

D'où

$$T = S - \frac{1}{4}S = \frac{3}{4}S$$

On alors

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = T - \frac{1}{4}S = \frac{3}{4}S - \frac{1}{4}S = \frac{1}{2}S = \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$, continue en 0 et telle que $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ soit convergente.

1. Montrer que l'intégrale suivante est convergente

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{f(\beta x) - f(\alpha x)}{x} dx, \quad (16)$$

pour tout $0 < \beta < \alpha$.

2. Calculer $I(\alpha, \beta)$.

Solution de l'Exercice

1. Avec changement de variables convenables ($\beta x = t$ et $\alpha x = t$), on trouve

$$\begin{aligned} \int_m^M \frac{f(\beta x) - f(\alpha x)}{x} dx &= \int_m^M \frac{f(\beta x)}{x} dx - \int_m^M \frac{f(\alpha x)}{x} dx \\ &= \int_{\beta m}^{\beta M} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{\alpha m}^{\alpha M} \frac{f(t)}{t} dt \\ &= \int_{\beta m}^{\alpha m} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{\beta M}^{\alpha M} \frac{f(t)}{t} dt. \end{aligned} \quad (17)$$

La dernière intégrale tend vers 0, quand $M \rightarrow +\infty$, car $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ est convergente.

Comme f est continue en 0 alors, pour tout $\epsilon > 0$, existe η tel que, pour tout $t \in (0, \eta)$, on a

$$|f(t) - f(0)| < \epsilon. \quad (18)$$

Ceci implique que, pour $\alpha m < \eta$

$$\left| \int_{\beta m}^{\alpha m} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{\beta m}^{\alpha m} \frac{f(0)}{t} dt \right| < \epsilon \int_{\beta m}^{\alpha m} \frac{dt}{t} = \epsilon \ln \frac{\alpha}{\beta}. \quad (19)$$

Comme $\int_{\beta m}^{\alpha m} \frac{f(0)}{t} dt = f(0) \ln \frac{\alpha}{\beta}$, la dernière proposition nous donne, pour $m < \frac{\eta}{\alpha}$

$$\left| \int_{\beta m}^{\alpha m} \frac{f(t)}{t} dt - f(0) \ln \frac{\alpha}{\beta} \right| < \epsilon \int_{\beta m}^{\alpha m} \frac{dt}{t} = \epsilon \ln \frac{\alpha}{\beta}. \quad (20)$$

Faisons $m \rightarrow 0$ et $M \rightarrow +\infty$ dans (17) et utilisons (20), on trouve

$$I(\alpha, \beta) = f(0) \ln \frac{\alpha}{\beta}. \quad (21)$$

Par exemple, pour $f(x) = \exp(-x)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-\beta x) - \exp(-\alpha x)}{x} dx = \ln \frac{\alpha}{\beta}. \quad (22)$$

Exercice 6.

1. En utilisant, le Theoreme d'Abel, prouver que les integrales suivantes sont convergentes

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t} dt. \quad (23)$$

2. En deduire la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t} + \cos t} dt. \quad (24)$$

Solution de l'Exercice

1. Les singularités (ou la fonction sous integrale n'est pas définie) sont $t = 0$ et $t = +\infty$. En decompose les integrales sous la forme $\int_0^1 + \int_1^{+\infty}$. Les integrales \int_0^1 sont convergentes en utilisant ou bien la comparaison, l'équivalence, ou les fait que les fonctions sont prolongeable par continuité en 0. Les integrales $\int_1^{+\infty}$ sont convergentes grace a une application du Theoreme d'Abel, **voir Support de cours-Pages 19–23**.
2. Tout d'abord, on remarque que $\sqrt{t} + \cos t \neq 0$ pour tout $t \geq 0$. Si non, $\sqrt{t} = -\cos t \leq 1$ donc $0 \leq t \leq 1 < \frac{\pi}{2}$. Comme $\cos t > 0$ et $\sqrt{t} \geq 0$ pour tout $0 \leq t \leq 1$, alors $\sqrt{t} + \cos t > 0$; contradiction. **La seule singularité alors figure au point $t = +\infty$** . On remarque de plus que

$$\frac{1}{\sqrt{t} + \cos t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \left(1 - \frac{\cos t}{\sqrt{t}} + \frac{\cos^2 t}{t \left(1 + \frac{\cos t}{\sqrt{t}} \right)} \right) \quad (25)$$

Donc,

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t} + \cos t} dt = \int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt - \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{\sin 2t}{t} dt + \int_1^\infty \frac{\sin t \cos^2 t}{t^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right)} dt \quad (26)$$

Les deux premières intégrales sont convergentes d'après la question 1. Pour la troisième intégrale, nous avons

$$\left| \frac{\sin t \cos^2 t}{t^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right)} \right| \leq \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\left|1 + \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right|} \sim \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \quad (27)$$

Comme $\int_1^\infty \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ est convergente, alors la troisième intégrale qui figure dans le deuxième membre de (26) est absolument convergente et donc convergente. Ceci donne alors la convergence de l'intégrale demandée $\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t} + \cos t} dt$