

## Examen Remplacement d'Analyse Numérique- Juillet 2021

Durée: 1h30

- Calculatrices sont autorisées.
- Les documents et téléphones sont interdits.
- Clarté de réponse est compatibilisée.

**Exercice 1.** On veut tabuler la fonction  $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$  aux points équidistants  $x_j = jh, j \geq 0$ .

1. Sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ , on interpole la fonction  $f$  par un polynôme de degré au plus 3 aux points  $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$ . Donner une estimation de l'erreur de cette interpolation sur  $[x_i, x_{i+1}]$ .
2. Quel  $h$  on peut prendre pour que cette erreur soit  $\leq 10^{-8}$  pour tout  $i > 0$  ?

**Exercice 2.** On considère la formule d'intégration suivante pour approximer  $\int_{-1}^1 f(x)dx$

$$Q(f) = \lambda_0 f\left(-\frac{1}{2}\right) + \lambda_1 f(0) + \lambda_2 f\left(\frac{1}{2}\right).$$

1. Calculer les coefficients  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  pour que  $Q$  soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
2. Quel est alors le degré d'exactitude de la méthode ?
3. Calculer  $\alpha \in ]-1, 1] \setminus \{0\}$ , tel que la formule d'intégration suivante soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3

$$\int_{-1}^1 g(x)dx \approx a_0 g(-1) + a_1 g'\left(-\frac{1}{2}\right) + a_2 g(\alpha). \quad (1)$$

**Exercice 3.** On considère le problème de Cauchy suivant :

$$y'(t) = -\frac{1}{1+t^2}y(t), \quad t \geq 0$$

avec la condition initiale suivante

$$y(0) = 5.$$

1. Donner la formulation de schéma d' **EULER IMPLICITE** pour ce problème.
2. Déterminer une valeur approchée pour  $y(2)$  à l'aide de ce schéma lorsque  $h = 0.5$ .