I) ESPACE $\mathbb{R}^2$

1) $\mathbb{R}^2$ **est un** $\mathbb{R}$**- espace vectoriel euclidien orienté.**

Voir cours sur les espaces vectoriels euclidiens.
La base canonique $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est orthonormée directe.
Le produit scalaire est noté simplement $\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}$, et la norme euclidienne $\|\overrightarrow{u}\|_2$.

2) $\mathbb{R}^2$ **est un** $\mathbb{R}$**- espace affine euclidien orienté.**

Ses éléments sont alors vus comme des points : si $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$, $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$
$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|_2$ est simplifié en AB.

3) $\mathbb{R}^2$ **est un** $\mathbb{R}$**- espace vectoriel normé.**
On a vu la norme euclidienne : $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$, mais il y en a d'autres :

DEF :
La norme 'sup' ou 'infinie' est définie par $\|(x,y)\|_\infty = \sup(|x|,|y|) = \max(|x|,|y|)$.

La norme '1' est définie par $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$.

(on montre que ce sont bien des normes sur $\mathbb{R}^2$ (appelées les normes usuelles sur $\mathbb{R}^2$)

Explication des notations $\|\|_{1,2,\infty}$
Pour $t > 0$, la norme 't' est définie par $\|(x,y)\|_t = \left(|x|^t + |y|^t\right)^{1/t}$: on peut montrer que c'est bien une norme, et que $\lim\limits_{t\to+\infty} \|(x,y)\|_t = \|(x,y)\|_\infty$.

4) $\mathbb{R}^2$ **est un espace métrique.**

DEF : une *distance* sur un ensemble E est une application d de E^2 dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant
$\forall x, y, z \in E$

$$\begin{aligned} d(x,y) &= 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(x,y) &= d(y,x) \text{ (propriété de symétrie)} \\ d(x,y) &\leqslant d(x,z) + d(z,y) \text{ (inégalité triangulaire)} \end{aligned}$$

un ensemble muni d'une distance est appelé un *espace métrique.*

PROP : tout espace vectoriel normé est un espace métrique pour la distance d définie par $d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \|\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}\|$.

Remarque : toute norme engendre donc une distance, mais une distance ne provient pas forcément d'une norme.

$\mathbb{R}^2$ est donc muni de 3 distances usuelles

$$\begin{aligned} d_1(A,B) &= |x_B - x_A| + |y_B - y_A| \\ d_2(A,B) &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \text{ noté tout simplement } AB \\ d_\infty(A,B) &= \max(|x_B - x_A|, |y_B - y_A|) \end{aligned}$$

Sans indication, dans la suite, $\|\|$ désignera la norme euclidienne.
5) $\mathbb{R}^2$ **est un espace topologique.**

Rappel : un intervalle du type $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ avec $\alpha > 0$ est appelé un *voisinage* de $x_0 \in \mathbb{R}$

DEF : un disque ouvert centré en M_0 $D(M_0,\alpha)=\{M\ /\ M_0M<\alpha\}$ est appelé un *voisinage* de $M_0\in\mathbb{R}^2$.

DEF : on dit qu'une partie U de $\mathbb{R}^2$ est *ouverte* si pour tout point M de U il existe un voisinage de M inclus dans U ; autrement dit si

$$\forall M\in U\qquad \exists\alpha>0\ \ \forall N\in\mathbb{R}^2\qquad MN<\alpha\Rightarrow N\in U$$

EXEMPLES :
(1) le plan tout entier et l'ensemble vide
un disque ouvert
le plan moins un point
le plan moins une droite
un demi-plan sans son bord
le complémentaire d'une demi-droite fermée (i.e. contenant son extrémité).
D1

PROP :
(2) Toute réunion d'ouverts est un ouvert
(3) toute intersection FINIE d'ouverts est un ouvert, mais cela peut être faux pour une intersection non finie.
D4
Coro : un carré ouvert,le complémentaire d'un ensemble fini sont ouverts.

CNS : U est ouvert ssi c'est une réunion de disques ouverts.
D3

On désigne plus généralement par *espace topologique* tout ensemble pour lequel on a décrété certaines parties "ouvertes", telles que soient exactes les propriétés (1) (2) (3) ci-dessus ; voici pourquoi on peut dire que $\mathbb{R}^2$ est un espace topologique.

II) FONCTIONS DE $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, limites et continuité.

1) Généralités.

f fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$; $f((x,y))$ est simplifié en $f(x,y)$.
D_f = ensemble de définition de f (partie de $\mathbb{R}^2$).
Surface représentative : $S_f=\left\{M\left|\begin{array}{l}x\\y\\z\end{array}\right.\ /\ (x,y)\in D_f \text{ et } z=f(x,y)\right\}$, d'équation cartésienne : $z=f(x,y)$.

EXEMPLES : E1

2) Limites

Définition générale d'une limite :
E_1 et E_2 sont deux espaces topologiques,
f une fonction de E_1 dans E_2,
X une partie de D_f
x_0 un point adhérent à X (c'est-à dire que tout voisinage de x_0 rencontre X)
l un point de E_2

Alors

$$f(x)\underset{\substack{x\to x_0\\x\in X}}{\longrightarrow} l \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall W \text{ voisinage de } l\ \ \exists V \text{ voisinage de } x_0\ /\ \forall x\in D_f\quad x\in V\Rightarrow f(x)\in W$$

Pour $E_1=E_2=\mathbb{R}$, on retrouve bien la définition

$$f(x)\underset{\substack{x\to x_0\\x\in X}}{\longrightarrow} l \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \exists\alpha>0\ \forall x\in X\ \ |x-x_0|<\alpha\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$$

Pour $E_1=\mathbb{R}^2$, $E_2=\mathbb{R}$, cas qui nous concerne ici, on obtient

$$f(x,y)\underset{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in X}}{\longrightarrow} l \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \ \exists\alpha>0\ \ \forall(x,y)\in X\ \ \|(x-x_0,y-y_0)\|<\alpha\Rightarrow|f(x,y)-l|<\varepsilon$$

$\|(x-x_0,y-y_0)\|$ pouvant être remplacé par l'une des 3 normes usuelles.

PROP 1 : si elle existe, la limite est unique.

On peut donc utiliser la notation : $l = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in X}} f(x,y)$.

PROP 2 : limite restreinte

si $Y \subset X$ et $(x_0,y_0) \in \overline{Y}$

$$l = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in X}} f(x,y) \Rightarrow l = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in Y}} f(x,y)$$

PROP 3 : opérations sur les limites
si $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in X}} f(x,y) = l_1$ et $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in X}} g(x,y) = l_2$

alors
$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in X}} (f+g)(x,y) = l_1 + l_2$
$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in X}} (fg)(x,y) = l_1 l_2$
si $l_2 \neq 0$ $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in X}} \dfrac{f}{g}(x,y) = \dfrac{l_1}{l_2}$
si $\lim\limits_{\substack{x\to l_1\\x\in f(X)}} h(x) = l_3$ (h fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in X}} h(f(x,y)) = l_3$.

Exemples : $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $g(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} = f(x^2,y)$, $h(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.
1) f n'admet pas de limite en $(0,0)$, ceci bien que $\lim\limits_{x\to0} f(x,0) = \lim\limits_{y\to0} g(0,y) = 0$
2) g n'admet pas de limite en $(0,0)$, ceci bien qu'elle admette pour limite 0 en $(0,0)$ sur toute droite passant par $(0,0)$!!
3) $\lim\limits_{(0,0)} h = 0$
D5

3) Continuité
Définition de la continuité : si $(x_0,y_0) \in D_f$

$$f \text{ est continue } (\mathcal{C}^0) \text{ en } (x_0,y_0) \overset{def}{\Leftrightarrow} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$
$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\alpha>0\ \forall(x,y)\in D_f\quad \|(x-x_0,y-y_0)\| < \alpha \Rightarrow |f(x,y)-f(x_0,y_0)| < \varepsilon$$

si $X \subset D_f$, f est continue sur X si la restriction de f à X est continue en tout point de X (c'est à dire $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in X}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ pour (x_0,y_0) dans X).

Exemples de base : toute fonction constante, et les deux fonctions coordonnées $(x,y)\mapsto x$ et $(x,y)\mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

D6

PROP 4 : toute somme, produit, quotient, composées de fonctions continues est continue.

D7

Corollaire : toute fonction f telle que $f(x,y)$ s'exprime algébriquement à l'aide de x,y, de constantes et des fonctions usuelles (sauf la partie entière) est continue sur son ensemble de définition.

E4

f définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ et $f(0,0) = 0$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ mais pas sur $\mathbb{R}^2$, par contre h définie par $h(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ et $h(0,0) = 0$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

D8

III) DÉRIVATION

1) Dérivées partielles.

DEF : f fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$; $(x_0, y_0) \in D_f$

f est dérivable (partiellement) par rapport à la première variable en (x_0, y_0) si la fonction partielle $\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to f(x, y_0) \end{array} \right.$ est dérivable en x_0, autrement dit, si

$$\frac{f(x_0+u, y_0) - f(x_0, y_0)}{u} \text{ tend vers une limite finie qd } u \to 0$$

Notations :

$$\begin{aligned} \lim_{u \to 0} \frac{f(x_0+u, y_0) - f(x_0, y_0)}{u} &= f'_1(x_0, y_0) = D_1(f)(x_0, y_0) \\ &= f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \lim_{u \to 0} \frac{f(x_0, y_0+u) - f(x_0, y_0)}{u} &= f'_2(x_0, y_0) = D_2(f)(x_0, y_0) \\ &= f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

EXEMPLES

E5

ATTENTION : la dérivabilité partielle par rapport aux deux variables en un point n'entraine pas la continuité en ce point !

Exemple : f définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ et $f(0,0) = 0$.

D9

2) Dérivée suivant un vecteur, dérivabilité dans une direction.

DEF : $M_0 = (x_0, y_0) \in D_f$, $\overrightarrow{u} = (v, w) \in \mathbb{R}^2$

f est dérivable suivant le vecteur $\overrightarrow{u}$ en M_0 si la fonction d'une variable $t \mapsto f(M_0 + t\overrightarrow{u})$ est dérivable en 0, autrement dit, si

$$\frac{f(x_0+tv, y_0+tw) - f(x_0, y_0)}{t} \text{ tend vers une limite finie qd } t \to 0$$

Notations : $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+tv, y_0+tw) - f(x_0, y_0)}{t} = f'_{\overrightarrow{u}}(x_0, y_0) = D_{\overrightarrow{u}}(f)(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x_0, y_0)$.

Remarque : cette notion généralise celle de dérivée partielle, en effet

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{i}} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{j}}$$

D10

Exemple : E6

PROP : si f est dérivable en M_0 suivant $\overrightarrow{u}$ elle est dérivable suivant tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{u}$ et

$$D_{\lambda\overrightarrow{u}}(x_0, y_0) = \lambda D_{\overrightarrow{u}}(x_0, y_0)$$

on dit donc que f est dérivable "dans la direction de $\overrightarrow{u}$.

D11

ATTENTION : l'application $\overrightarrow{u} \mapsto \varphi\left(\overrightarrow{u}\right) = D_{\overrightarrow{u}}(x_0, y_0)$ vérifie $\varphi\left(\lambda\overrightarrow{u}\right) = \lambda\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)$, mais elle n'est pas forcément linéaire ; exemple : f définie par $f(x, y) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$ et $f(0, 0) = 0$.

On va voir que cette fonction φ sera quand même forcément linéaire si f est de classe C^1.

3) Fonction de classe $\mathbf{C}^1$.

DEF : U ouvert inclus dans D_f
f est de classe C^1 sur U si
1. f est dérivable partiellement par rapport aux deux variables en tout point de U
2. les deux dérivées partielles $(x, y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $(x, y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sont continues sur U

TH Fondamental

Si f est de classe C^1 sur U , alors
1. f est continue sur U.
2. f est dérivable dans toute les directions en tout point de U
3. Si $(x, y) \in U$, et $\overrightarrow{u} = (v, w) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)v + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)w$$

(l'application $\overrightarrow{u} \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x, y)$ est donc linéaire pour tout point (x, y) de U).

DEF : dans ce cas la forme linéaire $\overrightarrow{u} = (v, w) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)v + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)w$ s'appelle la *différentielle* de f en (x, y), notée $df_{(x,y)}$.

Autrement dit : $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x, y) = df_{(x,y)}\left(\overrightarrow{u}\right) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)v + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)w$.

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est souvent noté (dx, dy), ce qui donne :

$$df_{(x,y)}\left(dx, dy\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

Notations simplifiées pratiques, mais abusives :

$$\begin{aligned} z &= f(x, y) \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \end{aligned}$$

(ceci explique pourquoi les dérivées partielles doivent impérativement s'écrire avec des d ronds).

PROP : différentielle d'une somme, d'un produit, d'un quotient et d'une composée :

Si f et g sont de classe C^1 sur U, alors $f+g$, fg et $\dfrac{f}{g}$ (si g jamais nulle sur U) aussi et

$d\left(f+g\right)_{(x,y)} = df_{(x,y)} + dg_{(x,y)}$
$d\left(fg\right)_{(x,y)} = f(x,y)dg_{(x,y)} + g(x,y)df_{(x,y)}$
$d\left(\dfrac{f}{g}\right)_{(x,y)} = \dfrac{g\left(x,y\right)df_{(x,y)} - f\left(x,y\right)dg_{(x,y)}}{g^2\left(x,y\right)}$

si de plus $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est de classe C^1 sur $f\left(U\right)$, $h\circ f$ est de classe C^1 sur U et

$$d\left(h\circ f\right)_{(x,y)} = h'\left(f(x,y)\right)df_{(x,y)}$$

en simplifié :

$d\left(z_1+z_2\right) = dz_1 + dz_2$
$d\left(z_1z_2\right) = z_1dz_2 + z_2dz_1$
$d\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \dfrac{z_2dz_1 - z_1dz_2}{z_2^2}$
$du = \dfrac{du}{dz}dz$

EXEMPLES : E7

4) Développements limités.

DEF : $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x_0,y_0)\in D_f$;
f possède un développement limité à l'ordre 1 en (x_0,y_0) s'il existe deux réels a et b tels que

$$f\left(x_0+u,y_0+v\right) = f\left(x_0,y_0\right) + au + bv + \underset{(u,v)\to(0,0)}{o}\left(\left\|(u,v)\right\|\right)$$

Remarque : si le DL1 existe, alors $a=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ et $b=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$; par contre l'existence des deux dérivées partielles n'entraîne pas l'existence d'un DL1 (exemple : toujours $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$).

D 12
TH : si f est C^1 sur U, f admet un DL à l'ordre 1 en tout point de U.

Exemple : E8

5) Plan tangent et gradient.

DEF : si f est C^1 sur U, $M_0=(x_0,y_0)\in U, z_0 = f\left(x_0,y_0\right)$ alors le plan d'équation

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\left(x-x_0\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\left(y-y_0\right)$$

est le plan tangent à la surface représentative S_f au point $\overline{M}_0 = (x_0,y_0,z_0)$; c'est le plan passant par $\overline{M}_0$ et orthogonal au vecteur $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)$ de $\mathbb{R}^3$.

CORO : la courbe de niveau z_0, d'équation $f\left(x,y\right)=z_0$ dans $\mathbb{R}^2$ a une tangente orthogonale au vecteur $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$ en M_0.

"D"13

DEF : le vecteur $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0)\right)$ (s'il existe) est appelé le gradient de f en M_0 ; notation $\overrightarrow{grad}\, f_{M_0}$.

Remarque 1 : on a donc, sur un ouvert où f est C^1 : $df_M(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{grad}\, f_M.\overrightarrow{u}$, ce qui , en simplifié, donne :

$$dz = \overrightarrow{grad}\, z.d\overrightarrow{M}$$

Remarque 2 : le gradient en M est toujours orthogonal à la courbe de niveau passant par M.

6) Dérivées partielles des composées.

a) Dérivée de $g(f(x,y))$.

Données : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^1 sur U, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^1 sur $f(U)$, $h = g \circ f$; alors

$\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) =$ ....
$\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) =$ ....

Soit, en simplifié :

$$\begin{aligned} \text{si } f(x,y) &= z, g(z) = u \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{du}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dz}\frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

D14

b) Dérivée de $f(g(x), h(x))$.

Données : g et h : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^1 sur I, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^1 sur U contenant les $(g(x), h(x))$ pour $x \in I$, $k(x) = f(g(x), h(x))$; alors

$$k'(x) = D_1 f(g(x), h(x))\, g'(x) + D_2 f(g(x), h(x))\, h'(x)$$

soit, en simplifié, en posant $g(x) = u, h(x) = v, f(u,v) = z$:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$

D15

c) Dérivées partielles de $f(g(x,y), h(x,y))$

Données : g et h : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^1 sur U, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^1 sur V contenant les $(g(x,y), h(x,y))$ pour $(x,y) \in U$, $k(x,y) = f(g(x,y), h(x,y))$; alors

$$D_1 k(x,y) = D_1 f(g(x,y), h(x,y)).D_1 g(x,y) + D_2 f(g(x,y), h(x,y)).D_1 h(x,y)$$

soit, en simplifié, en posant $g(x,y) = u, h(x,y) = v, f(u,v) = z$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

D16

7) Dérivées d'ordres supérieurs.

DEF : si $i_1, ..., i_k$ sont des entiers égaux à 1 ou 2,

$$D_{i_1,...,i_k} = D_{i_1} \circ ... \circ D_{i_k}$$

par exemple, pour $k = 2$

$$\begin{aligned}
(D_1 \circ D_1) f &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \circ \frac{\partial}{\partial x}\right) f \overset{\text{notations}}{=} D_{1,1} f = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} = f''_{x^2} \\
(D_1 \circ D_2) f &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \circ \frac{\partial}{\partial y}\right) f \overset{\text{notations}}{=} D_{1,2} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} \\
(D_2 \circ D_1) f &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \circ \frac{\partial}{\partial x}\right) f \overset{\text{notations}}{=} D_{2,1} f = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx} \\
(D_2 \circ D_2) f &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \circ \frac{\partial}{\partial y}\right) f \overset{\text{notations}}{=} D_{2,2} f = \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} = f''_{y^2}
\end{aligned}$$

EXEMPLE : E8

DEF : f est de classe C^k sur un ouvert U si toutes les dérivées partielles de f jusqu'à l'ordre k inclus existent et sont continues sur U.

TH : toute somme, produit, quotient, composée de fonctions de classe C^k est de classe C^k.

THÉORÈME de SCHWARZ :

Si f est de classe C^2 sur un ouvert U, les deux dérivées partielles $D_{1,2} f = f''_{xy}$ et $D_{2,1} f = f''_{yx}$ sont égales sur U.

"D"17 : ceci revient à démontrer la "simple" interversion de limites suivante :

$$\begin{aligned}
&\lim_{u \to 0} \lim_{v \to 0} \frac{f(x+u, y+v) - f(x+u, y) - f(x, y+v) + f(x, y)}{uv} \\
= &\lim_{v \to 0} \lim_{u \to 0} \frac{f(x+u, y+v) - f(x+u, y) - f(x, y+v) + f(x, y)}{uv}
\end{aligned}$$

COROLLAIRE : si f est de classe C^k sur U, les $D_{i_1,...,i_k} f$ ne dépendent pas de l'ordre des i_q.

D'où la notation : $D_{1^{k_1} 2^{k_2}} = \dfrac{\partial^k}{(\partial x)^{k_1} (\partial y)^{k_2}}$, avec $k_1 + k_2 = k$.

Question : combien existe-t-il donc de dérivées partielles "distinctes" à l'ordre k ?

8) Extremums.

DEF : f fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$; $(x_0, y_0) \in X \subset D_f$.
On dit que f possède (ou présente) un $\left\{\begin{array}{l} \textit{maximum absolu (ou global)} \text{ sur } X \\ \textit{minimum absolu (ou global)} \text{ sur } X \end{array}\right.$ en (x_0, y_0) si

$$\forall (x, y) \in X \ \ f(x, y) \left\{\begin{array}{l} \leqslant \\ \geqslant \end{array}\right. f(x_0, y_0)$$

On dit que f possède un $\left\{\begin{array}{l} \textit{maximum (local)} \\ \textit{minimum (local)} \end{array}\right.$ en (x_0, y_0) si f à possède un $\left\{\begin{array}{l} \text{maximum absolu sur un voisinage de } (x_0, y_0) \\ \text{minimum absolu sur un voisinage de } (x_0, y_0) \end{array}\right.$ en (x_0, y_0), autrement dit, s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in D_f \ \ (|x - x_0| < \alpha \text{ et } |y - y_0| < \alpha) \Rightarrow f(x, y) \left\{\begin{array}{l} \leqslant \\ \geqslant \end{array}\right. f(x_0, y_0)$$

"extremum" signifie "minimum" ou "maximum"
La *valeur* du maximum ou du minimum est alors $f(x_0, y_0)$.

On définit aussi la notion d'extremum *strict* par

$$\forall (x,y) \in X \setminus \{(x_0,y_0)\} \ f(x,y) \left\{ \begin{array}{c} < \\ > \end{array} \right. f(x_0,y_0)$$

TH : si les deux dérivées partielles de f existent en (x_0, y_0), et si (x_0, y_0) est intérieur à X (c'est-à dire s'il existe un voisinage de (x_0, y_0) inclus dans X) alors

$$f \text{ présente un extremum en } (x_0,y_0) \text{ sur } X \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$$

(c'est-à dire, si f est de classe C^1, $\overrightarrow{grad}\, f_{(x_0,y_0)} = \overrightarrow{0}$, ou $df_{(x_0,y_0)} = 0$).

D18

ATTENTION:

1) La réciproque est fausse : exemples: $f(x,y) = xy$ (cas d'un "col" ou "point-selle"), ou $f(x,y) = x^3$ (cas d'un "palier").

D19

2) Une fonction peut très bien avoir un extremum
- en un point où elle n'a pas ses deux dérivées partielles : exemples : $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ ou $f(x,y) = |x|$.
- en un point de la "frontière" de X : exemple : $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $X : x^2 + y^2 \leqslant 1$.

DEF : si f est de classe C^1 sur un ouvert U, les *points critiques* de f sur U sont les points où la différentielle de f s'annule.

REM : M est un point critique ssi le plan tangent en $\overline{M}$ à la surface S_f est horizontal.

On sait donc que les points de U où f est extrémale sont à rechercher parmi les points critiques.

Pour savoir si un point critique (x_0, y_0) correspond à un extremum, on étudie le signe de $f(x_0+u, y_0+v) - f(x_0, y_0)$ au voisinage de $(0,0)$.
E9 : $f(x,y) = (y-x)\left(y-x^2\right)$.