вектор-функций на $[-1, 1]$. Как хорошо известно [10], $\| G_\epsilon \|_{C \to C^i} \leqslant C_\epsilon^{-i}$. Наконец, из результатов де Бора [11] об аппроксимационных свойствах сплайн-функций можно вывести, что для некоторого $C_2 > 0$

$$(9) \qquad \| f - \hat{f} \|_C \leqslant C_2 / m^2.$$

Из (8) и (9) следует утверждение теоремы.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
20 VIII 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ascher U., Christiansen J., Russel R.D.* – Math. Comp., 1979, vol. 33. № 146, p. 659–679. 2. *Ascher U., Weiss R.* – SIAM J. Numer. Anal.,1987, vol. 20, № 3, p. 537–557. 3. *Ascher U., Weiss R.* – Math. Comp., 1984, vol. 43, № 167, p. 157–187. 4. *Ringhover C.* – SIAM J. Numer. Anal., 1984, vol. 21, № 5, p. 864–882. 5. *Flaherty J.E., Mathon W.* In: Boundary and inter. jayers comput. and asymp. meth. proc. BALL. I conf. Dublin, 1980, p. 77–92. 6. *Бахвалов Н.С.* – ЖВМиМФ, 1969, т. 9, №4, с. 841–959. 7. *Блатов И.А., Стрыгин В.В.* –ЖВМиМФ. 1985, т. 25, № 7, с. 1001–1009. 8. *Блатов И.А.* – ЖВМмМФ, 1986, т. 26, № 8, с. 1175–1188. 9. *Вайникко Г.М.* Компактная аппроксимация и приближенное решение уравнений. Тарту: Изд-во Тарт. ун-та, 1970. 10. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 11. *де Бор К.* Практическое руководство по сплэйнам. М.: Радио и связь, 1985. 12. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 13. *Блатов И.А.* Деп. ВИНИТИ, 1986, № 1804–В86.

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

А.А. БОРИЧЕВ

СВЕРТОЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СТРУКТУРА 1- И 2-ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ В ШКАЛЕ ПРОСТРАНСТВ ГРУБОГО РОСТА

(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 28 VII 1987)

В работе дано описание трансляционно-инвариантных подпространств в пространствах последовательностей, определяемых "грубой" асимптотикой роста (убывания) на бесконечности, которая учитывает лишь "порядок" роста, но не его "тип". После преобразования Фурье–Лапласа это приводит к полной классификации z-инвариантных подпространств (подмодулей над кольцом многочленов) в соответствующих алгебрах функций, аналитических в проколотой плоскости $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, или квазианалитических на единичной окружности $\Pi = \{\lambda \in \mathbf{C}: |\lambda| = 1\}$. Двойственные результаты состоят в описании решений (систем) однородных сверточных уравнений.

1. Постановка задачи. Основные пространства A и B – это пространства последовательностей, задаваемые условиями

$$A = \{\{a_n\}_{n \in \mathbf{Z}};\ \forall c\ \exists c_1 > 0: |a_n| \leqslant c_1 e^{-cp_{|n|}}\},$$

$$B = \{\{b_n\}_{n \in \mathbf{Z}};\ \exists c\ \exists c_1 > 0: |b_n| \leqslant c_1 e^{-cp_{|n|}}\},$$

где $\{p_n\}_{n \geqslant 0}$ – монотонно возрастающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая определенным ограничениям роста и регулярности. В A и B вводится естественная топология (соответственно проективного и индуктивного пределов). При $p_n \geqslant \log n$ $A = B^*$, $B = A^*$. Если

$$(*) \qquad \sup_n p_{n+1}/p_n < \infty,$$

то в пространствах A и B (непрерывно) действует группа сдвигов τ_s: $\{a_n\} \to \to \{a_{n-s}\}$, $\tau \overset{\text{def}}{=} \tau_1$.

Нетривиальное замкнутое подпространство E некоторого пространства последовательностей называется 2-и н в а р и а н т н ы м, если $\tau E = E$, 1-и н в а р и а н т н ы м, если $\tau E \subset E$, $\tau E \neq E$.

Из теоремы Хана–Банаха следует что 1- и 2-инвариантные подпространства суть множества решений систем сверточных уравнений двух типов соответственно на полугруппе $\mathbf{Z}_- \overset{\text{def}}{=} \{n \in \mathbf{Z} : n < 0\}$: $(a * b_i)_- = 0$, $a \in A$, $b_i \in B$, $i \in I$, и на всей группе $\mathbf{Z}$: $a * b_i = 0$, $a \in A$, $b_i \in B$, $i \in I$. Здесь $a * b = \left\{ \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n b_{k-n} \right\}_{k \in \mathbf{Z}}$ есть свертка последовательностей a и b, а x_- – последовательность, определяемая равенствами $x_- | \mathbf{Z}_- = x | \mathbf{Z}_-$, $x_- | \mathbf{Z}_+ = 0$.

Цель статьи—исследование 1- и 2-инвариантных подпространств пространств A и B и их фурье-образов. 2-инвариантные подпространства во многих (но не во всех) случаях допускают спектральный синтез (т.е. порождаются экспоненциальными полиномами, содержащимися в них), или – двойственным образом – соответствующие идеалы дивизориальны. Напротив, 1-инвариантные подпространства не дивизориальны, а все функции соответствующего подмодуля, как правило, имеют одинаковую (с точностью до умножения на z^k) особенность в точке 0.

Разумеется, структура изучаемых подпространств и свойства сверточных уравнений зависят от метрики пространства и свойств свертывателей; общие сведения о таких зависимостях см. в [1, 2]. В этой статье мы следуем схеме работы [3], где исследовался простейший случай $p_n = n$. Отметим также работу [4], где, в частности, разобран случай $p_n = \log n$, в котором оператор τ: $A \to$ А изоморфен сдвигу $z : C^\infty(\Pi) \to C^\infty(\Pi)$.

2. К л а с с и ф и к а ц и я. Последовательности $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ определяют одинаковые пары пространств A, B, если

$$0 < \varliminf_{n \to \infty} p_n/q_n, \qquad \varlimsup_{n \to \infty} p_n/q_n < \infty.$$

Верхняя граница роста рассматриваемых в статье весовых последовательностей $\{p_n\}$ определяется условием (*), а нижняя – условием квазианалитичности (на П) фурье-образа $\mathcal{F}A$. Получающуюся шкалу пространств разобъем на пять классов:

$$\text{I.} \quad \sum_{n>0} \frac{p_n}{n^2} = \infty, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{p_n}{n} = 0;$$

$$\text{II.} \quad \varliminf_{n\to\infty} \frac{p_n}{n} > 0, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{p_n}{n} < \infty;$$

$$\text{III.} \quad \varliminf_{n\to\infty} \frac{p_n}{n} = \infty, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{p_n}{n\log n} = 0;$$

$$\text{IV.} \quad \varliminf_{n\to\infty} \frac{p_n}{n\log n} > 0, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log p_n}{\log n} < \infty;$$

$$\text{V.} \quad \varliminf_{n\to\infty} \frac{\log p_n}{\log n} = \infty, \qquad \sup_n \frac{p_{n+1}}{p_n} < \infty.$$

В качестве типичных представителей для этих случаев можно рассмотреть последовательности $\{n/\log n\}$, $\{n\}$, $\{n \log\log n\}$, $\{n \log n\}$, $\{\exp n\}$. Далее будем считать, что выполнены некоторые условия регулярности роста. Например, в случае I таким условием будет: $\exists\epsilon > 0$: $p_n \cdot n^{-\epsilon}\uparrow$. Заметим, что для любой функции f из тела Харди (см. [5]) такой, что $\log f(x) \underset{x \to \infty}{=} O(x)$, $\int^{\infty} \frac{f(x)}{x^2}\, dx = \infty$, соответствующая последовательность $\{f(n)\}$ входит в один из вышеперечисленных классов, а упомянутые условия регулярности также выполняются. Поскольку эти границы роста достаточно естественны (в неквазианалитическом случае отсутствует дивизориальность, а при слишком быстром росте весовой последовательности $\{p_n\}$ не определен оператор сдвига), мы можем считать, что решаем задачу в "общем положении".

Не умаляя общности, можно считать, что в случаях II–V весовая последовательность выпукла, а в случае I вогнута, в случаях I–IV пространство A является алгеброй относительно свертки, а 2-инвариантные подпространства A суть идеалы этой алгебры.

3. Преобразование Фурье-Лапласа. Образ пространства A под действием преобразования Фурье–Лапласа $\mathscr{F}$: $\{a_n\} \to \sum a_n z^n$ есть пространство квазианалитических функций на П (случай I), или пространство $H(\mathbf{C}\setminus\{0\})$ всех аналитических в $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ функций (случай II), или пространство аналитических в $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ функций с некоторыми оценками на рост вблизи точек 0 и ∞ (случай III, IV). Если применить преобразование Фурье–Лапласа к пространству B_+, то получающийся формальный ряд будет сходиться лишь в случаях I и II; здесь и далее $B_\pm = \{b_\pm : b \in B\}$, $A_\pm = \{a_\pm : a \in A\}$. При этом в случае I множество $\mathscr{F}B_+$ есть пространство аналитических в круге функций с ограничением на рост, а в случае II – пространство всех функций, аналитических в окрестности нуля.

Преобразование Фурье–Лапласа обычно переводит 2-инвариантные подпространства в идеалы в алгебрах (голоморфных) функций. Эти идеалы, как правило, описываются в терминах нулей и их кратностей.

Введем обозначения. Пусть $\Omega \subset \mathbf{C}$ и пусть $H(\Omega)$ – множество всех аналитических в Ω функций, если Ω открыто, и множество всех аналитических во внутренности Ω и бесконечно дифференцируемых в Ω функций, если Ω замкнуто. Если $f \in H(\Omega)$, то дивизором f называется функция k_f: $\Omega \to \mathbf{Z}_+$, равная в точке $z \in \Omega$ кратности нуля функции f в этой точке. Если $E \subset H(\Omega)$, то дивизором E называется функция k_E, $k_E(z) \overset{\text{def}}{=} \inf\limits_{f \in E} k_f(z)$, $z \in \Omega$. Множество $E \subset H$, $H \subset H(\Omega)$ называется дивизориальным, если $E = \{f \in H: k_f \geqslant k_E\}$. Множество $E \subset A$ также будем называть дивизориальным, если дивизориально множество $\mathscr{F}E \subset \mathscr{F}A$. О связи между спектральным синтезом и дивизориальностью см. [2, 3]. Для рассматриваемых здесь случаев все необходимые результаты об идеалах содержатся в работах [6, 7], но можно воспользоваться и более элементарными методами доказательства дивизориальности, основанными на "возможности деления" в интересующих нас пространствах $H \subset H(\Omega)$, $f, g \in H$, $f/g \in H(\Omega) \Rightarrow f/g \in H$ (см. [8]). В случае I дивизориальность и "возможность деления" следуют из того, что функции из $\mathscr{F}A$ могут иметь лишь конечное число нулей на П. В итоге получаем следующий результат.

Теорема 1. *В случаях* I–IV *в алгебре A все замкнутые идеалы главные и дивизориальные. В пространстве B возможен спектральный синтез: каждое 2-инвариантное подпространство порождается экспоненциально-полиномиальными последовательностями, содержащимися в нем.*

4. Случаи II–IV. Основным инструментом для описания 1-инвариант-

ных подпространств в случаях II–IV является преобразование Карлемана (см. [9]). При этом приходится доказывать специальную теорему единственности:

(**) если $f \in A_- + B_+$, $g \in A$, $f * g = 0$, то $f = 0$ или $g = 0$.

Если $p_n = n$, то преобразование Карлемана элемента $b \in B$ есть мероморфное продолжение преобразования Фурье–Лапласа $\mathcal{F}b_+$ (аналитического в окрестности нуля) в окрестность бесконечности, совпадающее там с преобразованием Фурье–Лапласа $\mathcal{F}b_-$. И хотя в случаях III, IV такая интерпретация отсутствует, можно получить следующий результат.

Теорема 2. *В случаях* II–IV *в алгебре A все 1-инвариантные подпространства главные, т.е. имеют вид $a * A_+$, $a \in A$.*

Поэтому каждое 1-инвариантное подпространство пространства B есть множество решений $\{b \in B: (a * b)_- = 0\}$ (одного) сверточного уравнения. Для того чтобы описать это последнее множество, мы строим (как в [3]) оператор G_a, G_a: $B_+ \to B_-$ такой, что $\forall b \in B_+$ $(a * (G_a b + b))_- = 0$. После этого нужно лишь найти все элементы $b \in B_-$, для которых $(a * b)_- = 0$.

Для того чтобы сформулировать результаты, введем ряд обозначений. Элемент $b \in B$ будем представлять парой (b_-, b_+). Если f — аналитическая в окрестности точки ∞ функция, то через $(f)_\infty$ обозначается степенной ряд, в который она раскладывается в этой точке. Если $(f)_\infty \in \mathcal{F}B_-$, то соответствующий элемент из B_- обозначим $\mathcal{F}^{-1}((f)_\infty)$. Далее, пусть span E — замкнутая линейная оболочка множества E. Заметим, что каждая последовательность $a \in A$ представляется в виде $a = \tau_r a_+ * a_-$, где $r \in \mathbf{Z}$, $a_+ \in A_+ \backslash \tau A_+$, $a_- \in \tau A_- \backslash A_-$ (это разложение получается из соответствующей факторизации в $\mathcal{F}A$).

Теорема 3. *В случаях* II–IV *любое* 1-*инвариантное подпространство E пространства B имеет вид*

$$E = \tau_r \left[\left\{ \left(-\mathcal{F}^{-1} \left(\left(\frac{\mathcal{F}((a_- * b)_-)}{\mathcal{F}a_-} \right)_\infty \right), b \right) : \quad b \in B_+ \right\} \dotplus \right.$$

$$\left. \dotplus \operatorname*{span}_B \left\{ \left(-\mathcal{F}^{-1} \left(\left(\frac{1}{\mathcal{F}a_- \cdot (z - \lambda)^s} \right)_\infty \right), 0 \right) : \quad 1 \leqslant s \leqslant k_{\mathcal{F}a_+}(\lambda),\ \lambda \in \mathbf{C} \right\} \right],$$

где $r \in \mathbf{Z}$, $a_- \in \tau A_- \backslash A_-$, $a_+ \in \tau A_+ \backslash A_+$, $E = (\tau_r a_- * a_+ * A_+)^\perp$.

Эта формула аналогична формуле, полученной в [3] для случая $p_n = n$. Из теоремы 3 можно вывести следующие свойства 1-инвариантных подпространств пространства B (для случаев II–IV).

(а) Если E — 1-инвариантное подпространство, то

$\exists k \in \mathbf{Z}: (\tau_k E)_+ = B_+$.

(б) Можно попытаться записать 1-инвариантное подпространство в виде $E_1 + E_2$, где E_2 2-инвариантно, а E_1 1-инвариантно и не содержит 2-инвариантных подпространств. Оказывается, это возможно тогда и только тогда, когда функция $\mathcal{F}a$, $E = (a * A_+)^\perp$, не обращается в нуль в окрестности бесконечности.

5. Случай I. Здесь инвариантные подпространства устроены несколько сложнее. Как и в [4], удается упростить задачу, сведя ее к описанию трансляционно-инвариантных подпространств в пространствах "односторонних" последовательностей (на $\mathbf{Z}_+$).

Теорема 4. *Каждое* 1-*инвариантное подпространство E пространства A порождается двумя своими элементами: $\exists a_1, a_2 \in A$:*

$$E = \text{span}\,(a_1 * A_+, a_1 * a_2 * A_+) = \text{span}\,\{\tau_k a_1, \tau_k(a_1 * a_2): k \geqslant 0\}.$$

Теорема 5. *Любое* 1-*инвариантное подпространство E пространства B*

имеет вид

$$E = \tau_r \left\{ \left(-\mathscr{F}^{-1} \left(\left(\frac{\mathscr{F}((a*b)_-)}{\mathscr{F}a} \right)_\infty \right), b \right) : \ b \in B_+, \ k_{\mathscr{F}((a*b)_+)} \geqslant k \right\},$$

где $r \in \mathbf{Z}$, k *– дивизор некоторой функции из* $\mathscr{F}B_+$, $a \in \tau A_- \setminus A_-$.

Приведем ряд следствий этого описания.

(а) Если E – 1-инвариантное подпространство, то $\exists k \in \mathbf{Z}$: $(\tau_k E)_+ = B_+$ тогда и только тогда, когда дивизор k конечен.

(б) Любое 1-инвариантное подпространство E пространства B можно записать в виде $E_1 \dot{+} E_2$, где E_2 2-инвариантно, а E_1 1-инвариантно и не содержит 2-инвариантных подпространств.

6. Случай V. Пространства A и A_+ перестают быть сверточными алгебрами, и хотя "возможность деления" и наличие равномерной устойчивости (см. [8]) сохраняются, провести доказательство дивизориальности каким-нибудь из известных способов [7, 8, 10, 11] не удается. Оказывается, что она здесь вообще исчезает.

Теорема 6. *В пространстве A есть недивизориальное* 2-*инвариантное подпространство. В пространстве B не имеет места спектральный анализ: существует* 2-*инвариантное подпространство, не содержащее экспоненциально-полиномиальных последовательностей.*

7. Некоторое обобщение. Естественные условия, в которых можно доказывать теоремы единственности типа (**), сводятся к существованию свертки $f * g$. Зафиксировав, скажем требование $f \in A_- + B_+$, достаточно ограничиться аналогичным условием $g \in A_- + B_+$ и задаться, тем самым, вопросом о нетривиальных решениях уравнения

$$(***) \quad f * g = 0, \quad f, g \in (A_- + B_+) \setminus \{0\}.$$

Сумма $A_- + B_+$ является естественным "промежуточным" пространством (алгеброй в случаях I–IV) между пространствами A и B. Применяя теорему Хана–Банаха, можно получить, что разрешимость уравнения (***) эквивалентна наличию в $A_- + B_+$ нетривиальных 2-инвариантных подпространств. Отметим, что в $A_- + B_+$ нет экспоненциально-полиномиальных последовательностей, поэтому нельзя говорить о спектральном анализе–синтезе. Отсутствие решений для случая II очевидно, для случая IV следует из теоремы Домара [12]. Об отсутствии решений для случая I см. [13], доказательство отсутствия решений в случае III можно получить с помощью методов, сходных с методами [13].

Автор глубоко благодарен Н.К. Никольскому за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ленинградское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
5 VIII 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский Н.К.* Тр. МИАН, 1974, т. 120, с. 1–272. 2. *Никольский Н.К.* В кн.: Итоги науки и техники. Матем. анализ. 1974, т. 12, с. 199–412. 3. *Боричев А.А.* – Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1986, т. 149, с. 107–115. 4. *Макаров Н.Г.* – Матем сб., 1982, т. 119, с. 3–31. 5. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. М.: Мир, 1965. 424 с. 6. *Апресян С.А.* – Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1979, т. 92, с. 253–258. 7. *Красичков И.Ф.* – Матем. сб., 1977, т. 102, с. 216–247; т. 103, с. 69–111. 8. *Красичков И.Ф.* – Изв. АН СССР, Сер матем., 1979, т. 43, с. 44–66, с. 309–341. 9. *Carleman T.* L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent. Uppsala, 1944. 120 p. 10. *Никольский Н.К.* – ДАН, 1978, т. 240, с. 24–27. 11. *Ferrier J.-P.* Spectral theory and complex analysis. Amsterdam; L.: North-Holland, 1973. 93 p. 12. *Domar Y.* – Proc. Lond. Math. Soc.(3), 1983, vol. 46, p. 288–300. 13. *Borichev A.A., Volberg A.L.* – LOMI Preprint E–5–87, 1987, p. 1–39.