А. А. Боричев

ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ, ТЕОРЕМА ТИТЧМАРША И ПОЧТИ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Стандартное преобразование Фурье действует (мультипликативно) в пространствах функций не более чем экспоненциального роста.

В статье строится обобщение преобразования Фурье, сопоставляющее функциям асимметричного роста $f, f\in\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A}=\Big\{f\in C^\infty(\mathbf{R}):\exists\, c>0\ \forall\, k\,\exists\, c_1,\ |f^{(k)}(-x)|\leqslant c_1e^{-cp(x)},\ x<0,$$
$$\forall\, c>0\ \forall\, k\,\exists\, c_1,\ |f^{(k)}(x)|\leqslant c_1e^{cp(x)},\ x\geqslant 0\Big\},$$

классы эквивалентности почти аналитических функций $F, F\in Q$,

$$Q=\Big\{F\in C^1(\overline{\mathbf{C}}_+)\cap C(\mathbf{C}_+):\forall\, c<\infty\ \forall\, k\,\exists\, c_1,\ |\bar\partial f(z)|\leqslant c_1(1+|\operatorname{Re} z|)^{-k}e^{-cp^*(\operatorname{Im} z)},$$
$$\exists\, c<\infty\ \forall\, k\,\exists\, c_1,\ |f(z)|\leqslant c_1(1+|\operatorname{Re} z|)^{-k}e^{cp^*(\operatorname{Im} z)}\Big\},$$

по модулю идеала J функций F, исчезающих на бесконечности,

$$J=\Big\{F\in Q:\forall\, c<\infty\ \forall\, k\,\exists\, c_1,\ |f(z)|\leqslant c_1(1+|\operatorname{Re} z|)^{-k}e^{-cp^*(\operatorname{Im} z)}\Big\},$$

где $\lim\limits_{x\to\infty} p(x)/x=\infty$, а p^* – преобразование Лежандра функции p.

Сверточная алгебра $\mathfrak{A}$ оказывается изоморфной алгебре Q/J, а теоремы о сверточных уравнениях переформулируются и доказываются на языке почти аналитических функций.

Сверткой двух функций u и v называется функция $u*v$, задаваемая формулой

$$(u*v)(x)=\int u(x-y)v(y)\,dy.$$

Это основная операция гармонического анализа и важность ее проявляется, например, в том, что общий вид инвариантного относительно сдвигов оператора

Ключевые слова: сверточные уравнения, теорема Титчмарша о свертке, инвариантные подпространства, почти аналитические функции.

есть оператор свертки. В частности, сверточные операторы являются естественным обобщением дифференциально-разностных операторов (с постоянными коэффициентами).

Эффективность свертки в различных задачах гармонического анализа основана на нескольких ее основных свойствах, среди которых существенное место занимает правило сложения носителей, известное как теорема Титчмарша. (Здесь будет рассматриваться лишь одномерный случай).

В ее классической формулировке [1] эта теорема гласит, что выпуклая оболочка носителя свертки двух функций с компактными носителями равна сумме выпуклых оболочек этих носителей. При этом отказаться от условия компактности, вообще говоря, нельзя (достаточно, например, рассмотреть функции $u \equiv 1$ и

$$v,\ \operatorname{supp} v \subset (0, 1),\ \int_0^1 v(x)\,dx = 0\ ).$$

В работах И. Домара [2, 3] и И. В. Островского [4, 5] теорема Титчмарша была обобщена на случай функций (последовательностей), быстро убывающих ($\sim \exp(-|x| \log|x|)$, $\exp(-x^2)$) на отрицательной полуоси и, возможно, с некоторым ростом на положительной полуоси:

$$\inf \operatorname{supp} u + \inf \operatorname{supp} v = \inf \operatorname{supp} u \ast v. \qquad (\ast)$$

Следует отметить, что эти работы были мотивированы такими разными приложениями, как изучение радикальных алгебр и теория вероятностей.

В работах [6, 7] доказывались обобщения теоремы Титчмарша для случая функций на $\mathbf{Z}$ (последовательностей).

При этом использовалось специальное преобразование, обобщающее преобразование Фурье и сопоставляющее последовательности на $\mathbf{Z}$ (с определенной асимптотикой) почти аналитическую функцию, т. е. функцию f с контролируемым убыванием $\bar{\partial} f$ вблизи границы или на бесконечности. Это преобразование естественно называть преобразованием Дынькина ввиду особой роли, которую играет при его построении конструкция почти аналитического продолжения Е. М. Дынькина [8].

В теории сверточных уравнений преобразование Дынькина является аналогом преобразования Фурье (переводит свертку в произведение), но в отличие от последнего допускает применение в пространствах функций (последовательностей) сколь угодно большого роста, а не только экспоненциального. Его использование позволяет переводить задачи о сверточных уравнениях в таких пространствах на язык теории почти аналитических функций.

В свою очередь задачи о почти аналитических функциях решаются при помощи методов, развитых в [9, 10].

В этой статье рассматриваются пространства X функций на вещественной прямой $\mathbf{R}$, растущих на правой полуоси $\mathbf{R}_+$ и убывающих на левой полуоси $\mathbf{R}_-$, причем условия на рост и убывание варьируются в довольно широких пределах. Для таких пространств удается найти (в определенных условиях регулярности) точный порядок роста (убывания) функций, при котором выполняется теорема Титчмарша $(\ast)$, ослабленный вариант ее,

$$\operatorname{supp} u \subset \mathbf{R}_+,\ \operatorname{supp} v \subset \mathbf{R}_- \Rightarrow \inf \operatorname{supp} u + \inf \operatorname{supp} v = \inf \operatorname{supp} u \ast v,$$

а также утверждение об отсутствии делителей нуля:

$$u \ast v = 0 \Rightarrow u = 0 \ \text{или}\ v = 0.$$

Эти теоремы влекут отсутствие замкнутых собственных трансляционно-инвариантных подпространств или их стандартность в пространствах функций асимметричного роста (убывания). (Подпространство называется стандартным, если оно состоит из всех функций с носителем на некотором луче).

Для доказательства этих теорем в статье строится почти аналитический аналог интеграла Фурье, который, как и в дискретном случае, можно назвать преобразованием Дынькина. Это преобразование осуществляет изоморфизм алгебры гладких функций асимметричного роста (убывания) на $\mathbf{R}$ и фактор-алгебры алгебры почти аналитических функций f на $\mathbf{C}_+$:

$$|f(z)| < w_1(\operatorname{Im} z), \quad |\bar\partial f(z)| < w_2(\operatorname{Im} z),$$

по идеалу функций, исчезающих на бесконечности:

$$|f(z)| < w_2(\operatorname{Im} z), \quad |\bar\partial f(z)| < w_2(\operatorname{Im} z),$$

где мажоранты w_1, w_2 обладают свойствами $w_1 \uparrow \infty$, $w_2 \downarrow 0$ и зависят от исходного пространства X.

Как следствие задачи о сверточных уравнениях без потерь переводятся на язык почти аналитических функций. Важным средством для доказательства необходимых свойств этих последних оказывается лемма 3.7, аналогичная леммам о распространении оценки из [9, 10]. Основные результаты статьи доказываются сведением задачи к случаю аналитических функций и использованием для них теорем единственности – теоремы Линделёфа и модификации теоремы И. В. Островского [4, 5].

Первый параграф работы посвящен однородным сверточным уравнениям (теоремам типа Титчмарша) и задачам описания трансляционно-инвариантных подпространств в пространствах асимметричного роста (убывания).

Во втором параграфе обсуждаются точность результатов и характер ограничений, возникающих при применении техники почти аналитических функций.

В третьем параграфе проводится построение обобщенного преобразования Фурье (преобразования Дынькина) и исследуются свойства функций, почти аналитических в верхней полуплоскости.

В четвертом параграфе завершается доказательство теорем о сверточных уравнениях, переформулированных на языке почти аналитических функций.

Автор благодарен Н. К. Никольскому за постоянный интерес к работе и А. Л. Вольбергу и Д. В. Якубовичу за полезные обсуждения. Автор признателен И. Домару за разрешение опубликовать пример 2 (§ 2).

§ 1. Сверточные уравнения

Здесь приводится ряд известных теорем об однородных сверточных уравнениях, близких к теореме Титчмарша, и формулируются новые результаты. Из этих результатов выводятся описания инвариантных подпространств оператора сдвига в весовых пространствах функций.

Пусть задано пространство X функций на $\mathbf{R}$ или на $\mathbf{Z}$ (последовательностей). Подпространство E называется 2-инвариантным, если $\tau_t E = E$ для любого t, где τ_t – оператор сдвига на t в X, $\tau_t f(x) = f(x-t)$, который всегда будет предполагаться непрерывным. Подпространство E называется 1-(право)-инвариантным, если $\tau_t E \subsetneqq E$, $t \geqslant 0$, 1-(лево)-инвариантным, если $\tau_t E \subsetneqq E$, $t \leqslant 0$. Все подпространства предполагаются собственными (отличными от $\{0\}$ и X) и замкнутыми.

Множества решений однородных сверточных уравнений являются трансляционно-инвариантными подпространствами. Так, 2-инвариантные подпространства — это множества решений уравнений (или их систем)

$$(\mathbf{Z})\ a \circledast b = 0 \text{ на } \mathbf{Z}$$

или

$$(\mathbf{R})\ a \circledast b = 0 \text{ на } \mathbf{R},$$

1-(лево)-, (1-(право)-) инвариантные подпространства — это множества решений уравнений (или их систем)

$$(\mathbf{Z}_\pm)\ a \circledast b = 0 \text{ на } \mathbf{Z}_\pm$$

или

$$(\mathbf{R}_\pm)\ a \circledast b = 0 \text{ на } \mathbf{R}_\pm,$$

где a есть элемент X, а b — элемент сопряженного пространства X^*.

Наконец, если X есть пространство функций на $\mathbf{R}_+$ или на $\mathbf{Z}_+$ (последовательностей), то подпространство E называется инвариантным, если $\tau_t E \subset E$ для всех $t \geqslant 0$.

Инвариантные подпространства — это множества решений уравнений (или их систем)

$$(\mathbf{Z}_{+-})\ a \circledast b = 0 \text{ на } \mathbf{Z}_-$$

или

$$(\mathbf{R}_{+-})\ a \circledast b = 0 \text{ на } \mathbf{R}_-,$$

где $a \in X$, $b \in X^*$.

Стандартными 1-(право)-инвариантными (инвариантными) подпространствами называются подпространства $\tau_t X_+$, где X_+ — множество элементов пространства X, носитель которых лежит на правой полуоси.

Отсутствие (нетривиальных) решений уравнений ($\mathbf{Z}$) или ($\mathbf{R}$) эквивалентно отсутствию 2-инвариантных подпространств в X.

Мы будем рассматривать такую ситуацию, когда последовательности (функции) из X убывают при $x \to -\infty$ и, быть может, растут при $x \to \infty$.

И. Домар [3] называет теоремами типа Титчмарша утверждения о том, что все решения уравнения ($\mathbf{Z}_-$) (($\mathbf{R}_-$)) удовлетворяют соотношению

$$\inf \operatorname{supp} a + \inf \operatorname{supp} b \geqslant 0. \tag{1.1}$$

Это эквивалентно утверждению об одноклеточности оператора сдвига направо в X (т. е. о стандартности всех 1-(право)-инвариантных подпространств).

Наконец, утверждение о том, что все решения уравнения ($\mathbf{Z}_{+-}$) (($\mathbf{R}_{+-}$)) удовлетворяют соотношению (1.1), эквивалентно одноклеточности оператора сдвига в X (т. е. стандартности всех инвариантных подпространств).

В работе И. Домара [2, 3] установлены следующие результаты об уравнениях ($\mathbf{Z}_-$), ($\mathbf{R}_-$).

Т е о р е м а А. *Пусть* $\{p_n\}_{n\in \mathbf{Z}}$ *— последовательность, вогнутая при* $n \to -\infty$ *и выпуклая при* $n \to \infty$, $\lim\limits_{|n| \to \infty} p_n/n = \infty$, $\{a_n\}_{n\in \mathbf{Z}}$ *и* $\{b_n\}_{n\in \mathbf{Z}}$ *— последовательности комплексных чисел, удовлетворяющие условиям*

$$\text{(A)} \quad \sum_{n\in\mathbf{Z}} |a_n| e^{-p_n} < \infty, \quad \sum_{n\in\mathbf{Z}} |b_{-n}| e^{p_n} < \infty,$$

$$\text{(B)} \quad a \ast b = 0 \ \textit{на} \ \mathbf{Z}_-,$$

$$\text{(C)} \quad \begin{cases} \varliminf\limits_{n\to-\infty} \left(\dfrac{p_n}{n} - \alpha \log|n|\right) > -\infty, \\ \varliminf\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{p_n}{n} - \beta \log n\right) > -\infty, \\ \textit{где } \alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta\geqslant 2 \\ \textit{и по крайней мере один из этих пределов равен } +\infty. \end{cases}$$

Тогда

$$\text{(D)} \ \textit{найдется} \ k\in \mathbf{Z}\cup\ -\infty, \infty \ \textit{такое, что}$$

$$a_n = 0,\ n\leqslant k, \text{ и } b_n = 0,\ n\leqslant -k.$$

Теорема Б. *Пусть* $p\in C(\mathbf{R})$ *– функция, вогнутая при* $x\to-\infty$ *и выпуклая при* $x\to\infty$, $\lim\limits_{|x|\to\infty} p(x)/x=\infty$, μ *и* ν *– (комплексные) борелевские меры на* $\mathbf{R}$,

$$\text{(A)} \quad \int_{\mathbf{R}} e^{-p(x)} |d\mu(x)| < \infty, \quad \int_{\mathbf{R}} e^{p(x)} |d\nu(-x)| < \infty,$$

$$\text{(B)} \quad \mu \ast \nu = 0 \ \textit{на} \ \mathbf{R}_-,$$

$$\text{(C)} \quad \begin{cases} \varliminf\limits_{x\to-\infty} \left|\dfrac{p(x)}{x^{1+\alpha}}\right| > 0, \\ \varliminf\limits_{x\to\infty} \dfrac{p'(x)}{x^{1+\beta}} > 0, \\ \textit{где } \alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha\beta=1 \\ \textit{и по крайней мере один из этих пределов равен } +\infty. \end{cases}$$

Тогда

$$\text{(D)} \ \textit{найдется} \ k\in \mathbf{R}\cup\{-\infty, \infty\} \ \textit{такое, что}$$

$$\operatorname{supp}\mu \subset [k,\infty), \quad \operatorname{supp}\nu \subset [-k,\infty).$$

И. В. Островскому удалось в [4, 5] значительно ослабить условие на рост функции $|p(x)|$ за счет рассмотрения лишь мер с конечной вариацией и доказать следующее утверждение.

Теорема В. *Пусть* $p\in C(\mathbf{R}_+)$ *– возрастающая функция,* μ *и* ν *– (комплексные) борелевские меры на* $\mathbf{R}$ *с конечной вариацией,*

$$\text{(A)} \quad \int_{\mathbf{R}_+} e^{-p(x)} (|d\mu(-x)| + |d\nu(-x)|) < \infty,$$

$$\text{(B)} \quad \mu \ast \nu = 0 \ \text{на} \ \mathbf{R}_-,$$

$$\text{(C)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{x\log x} = \infty.$$

Тогда

$$\text{(D) } \textit{найдется } k \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\} \textit{ такое, что}$$

$$\operatorname{supp} \mu \subset [k, \infty), \ \operatorname{supp} \nu \subset [-k, \infty).$$

Применение обобщенного преобразования Фурье в [6, 7, 9] позволило доказать ряд новых результатов об уравнениях на $(\mathbf{Z})$, $(\mathbf{Z}_-)$.

Отметим, что из теоремы типа Титчмарша для уравнения $(\mathbf{Z}_-)$ вытекает отсутствие решений уравнения $(\mathbf{Z})$.

В работе [6] отсутствие решений уравнения $(\mathbf{Z})$ доказано в широких предположениях о росте веса $|p_n|$ (вплоть до границы квазианалитичности) за счет определенных предположений о регулярности веса и перехода от слабых ограничений (A) на $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ (обеспечивающих существование свертки лишь на $\mathbf{Z}_-$) к значительно более сильным. Именно справедливо следующее утверждение.

Теорема Г. *Пусть* $\{p_n\}_{n \geqslant 0}$ – *возрастающая последовательность,* $\{a_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ *и* $\{b_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ – *последовательности комплексных чисел такие, что*

$$(\mathrm{A}) \begin{cases} \exists c > 0, \ \sum\limits_{n>0} (|a_{-n}| + |b_{-n}|) e^{cp_n} < \infty, \\ \forall c > 0, \ \sum\limits_{n>0} (|a_n| + |b_n|) e^{-cp_n} < \infty, \end{cases}$$

$$(\mathrm{B}) \ a \ast b = 0 \ \textit{на} \ \mathbf{Z},$$

$$(\mathrm{C}) \begin{cases} \textit{либо} \{p_n\} - \textit{вогнутая последовательность}, \\ p_n > \log n, \ p_n = o(n), \ \sum\limits_{n>0} \dfrac{p_n}{n^2} = \infty, \\ \textit{либо} \{p_n\} - \textit{выпуклая последовательность}, \\ \textit{и} \ \ (\mathrm{i}) \ \varliminf\limits_{n \to \infty} \dfrac{p_n}{n} > 0, \ \varlimsup\limits_{n \to \infty} \dfrac{p_n}{n} < \infty, \\ \textit{или} \ \ (\mathrm{ii}) \ \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{p_n}{n} = \infty, \ \dfrac{p_n}{n \log n} \downarrow, \\ \textit{или} \ \ (\mathrm{iii}) \ \varliminf\limits_{n \to \infty} \dfrac{p_n}{n \log n} > 0. \end{cases}$$

Тогда

$$(\mathrm{D}) \ a = 0 \ \textit{или} \ b = 0.$$

При доказательстве случая, определенного условием (C) (iii), используется теорема А.

В [7] были получены необходимые и достаточные условия на рост $|p_n|$ для того, чтобы выполнялось утверждение типа Титчмарша для уравнения $(\mathbf{Z}'_-)$:

$$a \ast b = 0 \text{ на } \mathbf{Z}_-, \ (a \ast b)_0 = 1.$$

(Из этого утверждения уже не следует отсутствие решений уравнения $(\mathbf{Z})$). При этом на $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ накладываются следующие достаточно слабые условия (A).

Теорема Д. *Пусть* $\{p_n\}$ – *последовательность, вогнутая при* $n \to -\infty$ *и выпуклая при* $n \to \infty$, $\lim\limits_{|n| \to \infty} p_n/n = \infty$,

$$\varliminf_{|n| \to \infty} \frac{p_n}{n \log |n|} > 0, \quad \varliminf_{n \to \infty} (u_{\pm 2n} - u_{\pm n}) > 0, \text{ где } u_n = p_{n+1} - p_n.$$

Тогда из условий

$$\text{(A)} \quad \forall s, \quad \sum_{n \in \mathbf{Z}} |a_n| e^{-p_{n-s}} < \infty, \quad \sum_{n \in \mathbf{Z}} |b_{-n}| e^{p_{n-s}} < \infty,$$

и

$$\text{(B)} \quad a * b = 0 \text{ на } \mathbf{Z}_-, \quad (a * b)_0 \neq 0,$$

вытекает, что

$$\text{(D)} \quad \text{найдется } k \in \mathbf{Z} \cup \{-\infty, \infty\} \text{ такое, что}$$

$$a_n = 0, \ n \leqslant k, \ \text{и} \ b_n = 0, \ n \leqslant -k,$$

тогда и только тогда, когда

$$\text{(C)} \quad \varlimsup_{|n| \to \infty} \left(\frac{p_n}{n} - \log |n|\right) = \infty.$$

В настоящей работе будут доказаны следующие аналоги теорем Г и Д для $\mathbf{R}$.

Теорема 1.1. *Пусть* $p \in C(\mathbf{R}_+)$ – *выпуклая функция и для некоторого* c *функция* $p(x)x^{-c}$ *возрастает,* μ *и* ν – *(комплексные) борелевские меры на* $\mathbf{R}$,

$$\text{(A)} \begin{cases} \exists c > 0, \ \int\limits_{\mathbf{R}_+} e^{cp(x)} (|d\mu(-x)| + |d\nu(-x)|) < \infty, \\ \forall c > 0, \ \int\limits_{\mathbf{R}_+} e^{-cp(x)} (|d\mu(x)| + |d\nu(x)|) < \infty, \end{cases}$$

$$\text{(B)} \quad \mu * \nu = 0 \text{ на } \mathbf{R},$$

$$\text{(C)} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{p(x)}{x} = \infty.$$

Тогда

$$\text{(D)} \quad \mu = 0 \text{ или } \nu = 0.$$

Теорема 1.2. *Пусть* $p \in C(\mathbf{R}_+)$ – *выпуклая функция, для некоторого* c *функция* $p(x)x^{-c}$ *убывает,* μ *и* ν – *(комплексные) борелевские меры на* $\mathbf{R}$,

$$\text{(A)} \begin{cases} \exists c > 0, \ \int\limits_{\mathbf{R}_+} e^{cp(x)} (|d\mu(-x)| + |d\nu(-x)|) < \infty, \\ \forall c > 0, \ \int\limits_{\mathbf{R}_+} e^{-cp(x)} (|d\mu(x)| + |d\nu(x)|) < \infty, \end{cases}$$

$$\text{(B)} \quad \mu * \nu = 0 \text{ на } \mathbf{R}_-,$$

$$\text{(C)} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{p(x)}{x \log x} = \infty.$$

Тогда

$$\text{(D)}\ \textit{найдется}\ k \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}\ \textit{такое, что}$$

$$\operatorname{supp} \mu \subset [k, \infty),\ \operatorname{supp} \nu \subset [-k, \infty).$$

Обратимся теперь к пространствам на полуоси. Задача ($\mathbf{Z}_{+-}$) решалась в целом ряде работ с различными условиями на рост и регулярность веса p (см., например, [11, 12]).

Теорема Е [11]. *Пусть* $\{p_n\}_{n \geqslant 0}$ – *выпуклая последовательность,* $\{a_n\}_{n \geqslant 0}$ *и* $\{b_n\}_{n \leqslant 0}$ – *последовательности комплексных чисел, удовлетворяющих условиям*

$$\text{(A)}\ \sum_{n \geqslant 0} |a_n| e^{-p_n} < \infty,\quad \sum_{n \geqslant 0} |b_{-n}| e^{p_n} < \infty,$$

$$\text{(B)}\ a * b = 0\ \textit{на}\ \mathbf{Z}_-,$$

$$\text{(C)}\ \lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{n} = \infty.$$

Тогда

$$\text{(D)}\ \textit{найдется}\ k \in \mathbf{Z} \cup \{\infty\}\ \textit{такое, что}$$

$$a_n = 0,\ n \leqslant k,\ \textit{и}\ b_n = 0,\ n \leqslant -k.$$

Задача ($\mathbf{R}_{+-}$) исследовалась в работах [2, 13, 14].

Теорема Ж [2]. *Пусть* $p \in C(\mathbf{R}_+)$ – *выпуклая функция,* μ *и* ν – *(комплексные) борелевские меры соответственно на* $\mathbf{R}_+$ *и* $\mathbf{R}_-$,

$$\text{(A)}\ \int_{\mathbf{R}_+} e^{-p(x)} |d\mu(x)| < \infty,\quad \int_{\mathbf{R}_+} e^{p(x)} |d\nu(-x)| < \infty,$$

$$\text{(B)}\ \mu * \nu = 0\ \textit{на}\ \mathbf{R}_-,$$

$$\text{(C)}\ \lim_{x \to \infty} \frac{p(x)}{x\sqrt{\log x}} = \infty.$$

Тогда (D) *найдется* $k \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ *такое, что*

$$\operatorname{supp} \mu \subset [k, \infty),\ \operatorname{supp} \nu \subset [-k, 0].$$

Здесь будет доказан следующий результат.

Теорема 1.3. *Пусть* $p \in C(\mathbf{R}_+)$ – *выпуклая функция и для некоторого* c *функция* $p(x)x^{-c}$ *возрастает,* μ *и* ν – *(комплексные) борелевские меры соответственно на* $\mathbf{R}_+$ *и* $\mathbf{R}_-$,

$$\text{(A)} \begin{cases} \forall c > 0, & \int_{\mathbf{R}_+} e^{-cp(x)} |d\mu(x)| < \infty, \\ \exists c > 0, & \int_{\mathbf{R}_+} e^{cp(x)} |d\nu(-x)| < \infty, \end{cases}$$

$$\text{(B)}\ \mu * \nu = 0\ \textit{на}\ \mathbf{R}_-,$$

$$(\mathrm{C})\quad \lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{x}=\infty.$$

Тогда (D) *найдется* $k\in\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ *такое, что*

$$\operatorname{supp}\mu\subset[k,\infty),\ \operatorname{supp}\nu\subset[-k,0].$$

Теоремы 1.1–1.3 доказываются в § 3, 4.

Теорема 1.1 является полным аналогом теоремы Г.

В отличие от теоремы Д в теореме 1.2 рассматриваются лишь симметричные веса. В то же время теорема 1.2 дает значительно лучший порядок роста ($\sim x\log x$), чем теорема Б ($\sim x^2$ для симметричной мажоранты), который совпадает с оптимальным (см. § 2), найденным в случае мер ограниченной вариации в теореме В.

Теорема 1.3 дает наилучший порядок роста, совпадающий с полученным в теореме Е для случая $\mathbf{Z}$.

Заметим, наконец, что в теоремах 1.1–1.3 условие (А) можно заменить на несколько более слабое:

$$\exists c>0,\ \int_{\mathbf{R}_+} e^{cp(x)}(|d\mu(-x)|+|d\nu(-x)|)<\infty,$$

$$\int_{\mathbf{R}_+} e^{-cc_1p(x)}(|d\mu(x)|+|d\nu(x)|)<\infty$$

(теоремы 1.1 и 1.2) или

$$\exists c>0\ \int_{\mathbf{R}_+} e^{cp(x)}|d\nu(-x)|<\infty,\ \int_{\mathbf{R}_+} e^{-cc_1p(x)}|d\mu(x)|<\infty$$

(теорема 1.3), где c_1 зависит лишь от p.

Теоремы 1.1–1.3 используются для описания трансляционно-инвариантных подпространств в пространствах следующего типа. Пусть $p\in C(\mathbf{R}_+)$ – выпуклая функция,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{x}=\infty \text{ и } \exists c<\infty:\ p(x)x^{-c} \text{ убывает.}$$

Определим пространство функций асимметричного роста $\mathfrak{A}^{(2)}$ равенством

$$\mathfrak{A}^{(2)}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\Big\{f\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}):\ \forall c>0,\ \int_{\mathbf{R}_+}|f(x)|^2e^{-cp(x)}dx<\infty,$$

$$\exists c>0,\ \int_{\mathbf{R}_+}|f(-x)|^2e^{cp(x)}dx<\infty\Big\}.$$

Пространство $\mathfrak{A}^{(2)}$, снабженное топологией суммы проективного и индуктивного пределов, является самосопряженной топологической алгеброй (со сверткой в качестве мультипликативной операции).

Теорема 1.4. *Алгебра* $\mathfrak{A}^{(2)}$ *не содержит 2-инвариантных подпространств (т. е. замкнутых собственных идеалов).*

Теорема 1.5. *При условии* $\lim\limits_{x\to\infty}p(x)/\log x=\infty$ *все 1-(право)-инвариантные подпространства алгебры* $\mathfrak{A}^{(2)}$ *стандартны.*

Теорема 1.6. *Все инвариантные подпространства алгебры* $\mathfrak{A}^{(2)}_+$ *стандартны.*

Вывод теорем 1.4–1.6 из теорем 1.1–1.3 состоит в простом применении теоремы Хана–Банаха.

Отметим, наконец, что описание 1-лево-инвариантных подпространств в рассматриваемых нами асимметричных пространствах представляет более сложную задачу (см. соответствующие теореме Д теоремы 10, 11 [6]). В частности, это описание должно включать решение задачи спектрального анализа–синтеза для оператора обратного сдвига в X_+ (т. е. ответ на вопрос, порождаются ли инвариантные подпространства содержащимися в них экспоненциально-полиномиальными функциями, см. также [15]).

§ 2. Точность результатов

Теоремы Г, Д, 1.1–1.3, получаемые с помощью почти аналитического обобщения преобразования Фурье, содержат более слабые, чем в теоремах А, Б, В, Ж условия на рост p. Достигается это за счет ряда условий на регулярность p и за счет замены слабых условий (А), обеспечивающих лишь существование свертки, на более сильные.

Возникают два вопроса: насколько точны полученные результаты и не происходит ли потери содержания за счет указанной замены.

Рассмотрим сначала случай $\mathbf{Z}$. Следующий пример, построенный И. Домаром [2, 16], показывает, что оценка роста в теореме Д неулучшаема.

Пример 1. Пусть $p_n = \log n!$, $a_n = 0$, $b_n = 0$ при $n > 0$, $p_n = -(n + \log(|n|!))$, $a_n = (|n|!)^{-1}$, $b_n = (-1)^n (|n|!)^{-1}$ при $n \leqslant 0$. Тогда $a \ast b = 0$ на $\mathbf{Z}_-$, но

$$\inf \operatorname{supp} a = \inf \operatorname{supp} b = -\infty.$$

Для того чтобы теорема Д стала обобщением теоремы А, необходимо исключить случай $a \ast b = 0$ на $\mathbf{Z}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. К сожалению, теорема Г позволяет сделать это лишь при очень сильных условиях (А). Можно ли сделать это в условиях теоремы Д, остается неизвестным.

В то же время, как показывает следующий пример, сообщенный автору И. Домаром, утверждение теоремы Г (точнее, части ее, соответствующей условию (С) (ii)) перестает выполняться, если заменить в ней условие (А) на условие (А) теоремы А.

Пример 2. Пусть $0 < \epsilon < 1$, $p_n = \log \Gamma((1-\epsilon)n)$, $n \geqslant 0$, $p_n = -\log \Gamma((1-\epsilon)|n|)$, $n < 0$, где Γ – гамма-функция, f – целая функция экспоненциального типа $\pi\epsilon/2$, убывающая на $\mathbf{R}$ при $|x| \to \infty$ быстрее, чем полиномиально. Пусть далее $g(z) = f(z)/\Gamma((1-\epsilon)z)$. Тогда для любого $m \in \mathbf{Z}$ функция $g(z)g(m-z)$ – целая, экспоненциального типа π, и суммируемая на $\mathbf{Z}$. Следовательно, по формуле суммирования Пуассона,

$$\forall\, m, \quad \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n g(n) g(m-n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \operatorname*{res}_{z=n} \left(\frac{\pi \cdot g(z) g(m-z)}{\sin \pi z} \right) = 0,$$

$$\left\{ g(n) \right\}_{n \in \mathbf{Z}} \ast \left\{ (-1)^n g(n) \right\}_{n \in \mathbf{Z}} = 0.$$

Обратимся теперь к случаю $\mathbf{R}$. Здесь переход к сильным условиям (А) сказывается очень существенно.

Пример 3. ([2, 16]). Если $p \in C^1(\mathbf{R})$ – возрастающая функция, выпуклая при $x \to \infty$ и вогнутая при $x \to -\infty$, $\int_{\mathbf{R}} \frac{dp(x)}{1+x^2} < \infty$, то найдутся $f, g \in C(\mathbf{P})$ такие, что

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)|\, e^{-p(x)}\, dx < \infty, \quad \int_{\mathbf{R}} |g(-x)|\, e^{p(x)}\, dx < \infty,$$

$$\inf \operatorname{supp} f = \inf \operatorname{supp} g = -\infty,$$

$$f \divideontimes g = 0 \text{ на } \mathbf{R}_-.$$

При переходе к сильному условию (A) теоремы 1.2 ситуации, подобные описанной в примере 3, выпадают из рассмотрения. Таким образом, теряется довольно существенная информация.

В то же время получающийся порядок роста p является точным уже вплоть до класса мер с ограниченной вариацией, как показывает следующий пример.

Пример 4 (см. аналогичный пример в [4, 5]). Пусть $c > 0$ и меры $\mu_\pm$ таковы, что

$$\hat{\mu}_\pm(z) = \exp(\pm \cos cz). \text{ Тогда } \mu_1 \divideontimes \mu_2 = \delta_0.$$

Наконец, порядок роста в теореме 1.3 также точен. Эту теорему можно рассматривать как определенный ответ на задачу 1 из [2].

§ 3. Континуальное преобразование Дынькина и простейшие свойства почти аналитических функций в верхней полуплоскости

3.1. Здесь строится преобразование, являющееся аналогом „преобразования Дынькина", построенного в [6, 9] для пространств последовательностей. Мы называем его континуальным преобразованием Дынькина, ибо при его построении, как и в дискретном случае, используется конструкция почти аналитического продолжения.

Континуальное преобразование Дынькина осуществляет изоморфизм между пространством гладких функций асимметричного роста и фактор-алгеброй алгебры почти аналитических функций в $\mathbf{C}_+$ ($\mathbf{C}_+ \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$).

Как следствие теоремы о сверточных уравнениях из § 1 оказываются эквивалентными результатам о почти аналитических функциях. Простые результаты доказываются в этом параграфе; более сложные – эквивалентные теоремам 1.2 и 1.3 – в § 4.

Наши рассуждения будут аналогичны приведенным в [6, 9].

3.2. Мы докажем здесь ряд технических утверждений.

В дальнейшем будем всегда предполагать, что вес p удовлетворяет условию

$$\left.\begin{aligned} &p \in C^\infty(\mathbf{R}_+) \text{ – строго выпуклая функция,} \\ &p(0) = 0; \;\; p(x) \geqslant 0, \; x \in \mathbf{R}_+; \quad \lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{x} = \infty. \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Определим преобразование Лежандра функции p – функцию p^*,

$$p^*(r) \overset{\text{def}}{=} \max_x (rx - p(x)), \; r \in \mathbf{R}.$$

Тогда $p^* \in C^\infty(\mathbf{R}_+)$ – строго выпуклая функция,

$$p(x) = \max_r (rx - p^*(r)), \; x \in \mathbf{R}_+,$$

Функция $\dfrac{p^*(x)}{x}$ монотонно возрастает к $+\infty$.

Лемма 3.1. *Пусть* $p_1(x) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_0^\infty e^{xr-p^*(r)}\,dr$.

Тогда

$$\frac{\exp p(x)}{2x} < p_1(x) < \exp\ p(x+1),\ x > \max(p^{*\prime}(1), 1).$$

Доказательство. Для данного x пусть s — такое число, что

$$p(x) = \max_r (rx - p^*(r)) = sx - p^*(s).$$

Тогда

$$p_1(x) > \int\limits_0^s e^{xr-p^*(r)}\,dr > \int\limits_0^s e^{xs-p^*(s)}\,e^{xr-xs}\,dr =$$

$$= \frac{\exp p(x)}{x}\ (1-e^{-sx}) > \frac{\exp p(x)}{2x} \text{ при } s, x > 1.$$

С другой стороны,

$$p_1(x) = \int\limits_0^\infty e^{(x+1)r-p^*(r)}\,e^{-r}\,dr < \exp p(x+1).$$

Лемма 3.2. (а) *Если для некоторого* $c < \infty$

$$\text{\textit{функция} } p(x)x^{-c} \text{ \textit{убывает},} \tag{3.2}$$

то для некоторого $\epsilon > 0$ *функция* $p^*(x)x^{-1-\epsilon}$ *возрастает.*

(б) *Если*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{x\log x} = \infty,$$

то

$$\log p^*(x) = o(x).$$

Доказательство:

(а) Пусть $q(x)$ — функция, обратная функции $p'(x)$. Тогда

$$p^*(x) = xq(x) - p(q(x)),$$

$$(p^*(x)x^{-1-\epsilon})' = x^{-2-\epsilon}\,((1+\epsilon)p(q(x)) - \epsilon xq(x)).$$

Поскольку для подходящего ϵ, $\dfrac{1+\epsilon}{\epsilon} = c$,

$$(p(x)x^{-\frac{1+\epsilon}{\epsilon}})' < 0,$$

то

$$p(x) > \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\,xp'(x),\ p(q(x)) - \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\,xq(x) > 0,$$

и мы получаем искомое неравенство,

$$(p^*(x)x^{-1-\epsilon})' > 0.$$

(б) Если $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{p(x)}{x\log x} = \infty$, то для любого $c<\infty$ при достаточно больших r

$$p^*(r) = \max(rx - p(x)) < \max(rx - cx\log x) = \frac{c}{e}e^{r/c},$$

$$\log p^*(r) < \log\frac{c}{e} + \frac{z}{c}.$$

Лемма доказана.

Зафиксируем вес p и введем следующие классы почти аналитических функций в $\mathbf{C}_+$.

Будем говорить, что f лежит в S_k, $k\geqslant 0$, если

$$f\in C^1(\mathbf{C}_+)\cap C(\mathbf{C}_+),\ |f(x)| = O(|x|^{-k}),\ x\in\mathbf{R},$$

$$\forall h>0,\ \sup_{0<y<h} |f(x+iy)| < \infty,$$

и функция

$$z\to |z|^k e^{p^*(\operatorname{Im} z - 1)} \sup_{\substack{|z-\zeta|<1\\ \zeta\in\mathbf{C}_+}} |\bar\partial f(\zeta)|$$

суммируема на $\mathbf{C}_+$.

Оказывается, что такую функцию можно естественным образом разложить на аналитическую (a_f) и „антианалитическую" (K_f) части и сопоставить ей некоторую достаточно гладкую функцию ($T_{f,0}$) – аналог обратного преобразования Фурье.

Легко видеть, что для всех $z\in\mathbf{C}$ сходится интеграл

$$K_f(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi}\iint_{\mathbf{C}_+} \frac{\bar\partial f(\zeta)}{z-\zeta}\, dm_2(\zeta).$$

(Действительно,

$$|K_f(z)| \leqslant \iint_{|z-\zeta|>1} |\bar\partial f(\zeta)|\, dm_2(\zeta) + 2\sup_{|z-\zeta|<1} |\bar\partial f(\zeta)| < \infty).$$

Определим функцию $a_f \overset{\text{def}}{=} f - K_f$.

Функция K_f является потенциалом Коши с непрерывным символом. Поэтому $\bar\partial K_f = \bar\partial f$ в смысле обобщенных функций, $\bar\partial a_f = 0$.

Значит, функция a_f аналитична в $\mathbf{C}_+$ (см., например, [17]), функция $K_f = f - a_f \in C^1(\mathbf{C}_+)$.

Лемма 3.3. *Если $f\in S_k$, $k\geqslant 2$, то*

(а) *существуют пределы*

$$T_{f,j}(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{y\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{R}+iy} z^j f(z) e^{izx}\, dz,\quad 0\leqslant j\leqslant k-2,$$

причем сходимость равномерна на компактах, (б) $T_{f,0}\in C^{k-2}(\mathbf{R})$, $T_{f,0}^{(j)}=i^j T_{f,j}$, $0<j\leqslant k-2$,

(в) *функция* a_f *есть сумма двух функций* v_f *и* w_f *(не зависящих от* k*) таких, что*

$$v_f\in A(\mathbf{C})\cap S_{k-2}\cap H^\infty(\mathbf{C}_-),$$

$$e^{iz}w_f(z)\in H^\infty(\mathbf{C}_+).$$

Доказательство. (а) Поскольку $|f(x)|=O(|x|^{-k})$, для любого $h>0$, $\sup\limits_{0<y<h}|f(x+iy)|<\infty$, простая оценка типа теоремы о двух константах показывает, что для любого $y>0$,

$$|f(x+iy)|=O(|x|^{-k+\frac{1}{2}}),\ |x|\to\infty.$$

Следовательно, интегралы

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbf{R}+iy} z^j f(z)e^{izx}dz,\ 0\leqslant j\leqslant k-2,$$

сходятся, и достаточно лишь доказать, что для любых A и c найдется y_0 такое, что для любых $x\in[-A,A]$, y_1 и y_2 таких, что $y_0<y_1<y_2$,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbf{R}+iy_1} z^j f(z)e^{izx}dz-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbf{R}+iy_2} z^j f(z)e^{izx}dz\right|\leqslant c,\ 0\leqslant j\leqslant k-2.$$

Но по формуле Грина

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbf{R}+iy_1} z^j f(z)e^{izx}dz-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbf{R}+iy_2} z^j f(z)e^{izx}dz=$$

$$=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{y_1<\mathrm{Im}z<y_2} z^j\bar\partial f(z)e^{izx}dm_2(z).\tag{3.3}$$

Искомый результат вытекает теперь из определения класса S_k (и того, что $x=o(p^*(x))$).

(б) Поскольку функции

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbf{R}+iy} f(z)e^{izx}dz$$

лежат в $C^{k-2}(\mathbf{R})$ для любого $y>0$ и сходимость этих функций (к $T_{f,0}$) и их производных (к $T_{f,j}$) равномерна,

$$T_{f,0}\in C^{k-2}(\mathbf{R}),\ T_{f,0}^{(j)}=T_{f,j},\ 0<j\leqslant k-2.$$

(в) Заметим, что

$$\left|K_f(z)-\frac{1}{\pi z}\iint\limits_{\mathbf{C}_+}\bar\partial f(\zeta)dm_2(\zeta)\right|=O\left(\frac{1}{|z|^2}\right),\ z\in\mathbf{C},$$

поэтому для некоторого c

$$|a_f(x)-\frac{c}{x}|=O\left(\frac{1}{|x|^2}\right),\ |x|\to\infty,\ x\in\mathbf{R}.$$

Определим функции

$$a_f^-(z)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{R}}\frac{a_f(\zeta)}{z-\zeta}\,d\zeta,\ z\in\mathbf{C}_+, \tag{3.4}$$

$$a_f^+\overset{\text{def}}{=}a_f-a_f^-.$$

Тогда

$$a_f^-\in A(\mathbf{C}_+),\quad \lim_{\substack{|z|\to\infty\\ z\in\mathbf{C}_+}}a_f^-(z)=0,$$

где $A(\Omega)$ – множество функций, аналитических в Ω.

Сдвигая контур интегрирования в (3.4) вверх, получаем, что $a_f^+\in A(\mathbf{C})$,

$$\forall h>0,\quad \sup_{0<y<h}|a_f^+(x+iy)|<\infty.$$

Используя асимптотику a_f на $\mathbf{R}$, получаем, что для некоторого c_1,

$$|a_f^+(x)-\frac{c_1}{x}|=O\left(\frac{1}{|x|^2}\right),\ |x|\to\infty,\ x\in\mathbf{R},$$

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty\\ z\in\mathbf{C}_-}}a_f^+(z)=0.$$

Следовательно, a_f^+ есть интеграл Фурье некоторой функции $\varphi\in C(\mathbf{F}_+)$, $\varphi(0)=c_1$. При $x>0$. $T_{f,0}(x)=\dfrac{\varphi(x)}{2\pi i}$, поскольку

$$\lim_{y\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{R}+iy}\left(K_f(z)+a_f^-(z)+\frac{c_1}{z}\right)e^{izx}dz=0.$$

Пусть C^{k-2}-гладкая функция $h(x)$ совпадает с $T_{f,0}(x)$ на $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$, а ее носитель лежит на луче $(0,\infty)$. Далее,положим

$$v_f(z)\overset{\text{def}}{=}\int_0^\infty h(x)e^{-izx}dx,$$

$$w_f\overset{\text{det}}{=}a_f-v_f.$$

Осталось лишь проверить, что

$$e^{iz}w_f(z)\in H^\infty(\mathbf{C}_+).$$

Действительно, функция $g\overset{\text{def}}{=}w_f+K_f$ лежит в S_{k-2}, $T_{g,0}(x)=T_{f,0}(x)-h(x)=0$ при $x>\frac{1}{2}$, следовательно, носитель функции ψ, интеграл Фурье которой равен

a_g^+, лежит в $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $|a_g^+(z)| < e^{|\operatorname{Im} z|}$. Наконец, сумма $K_g + a_g^-$ всегда ограничена в $\mathbf{C}_+$.

3.3. Само построение обобщенного преобразования Фурье, обратного отображению $f \to T_{f,0}$, проводится в следующей лемме.

Лемма 3.4. (а) *Пусть носитель функции* φ, $\varphi \in C^k(\mathbf{R})$, *лежит в* $\mathbf{R}_+$, φ *и вес* p *удовлетворяют условию*

$$\int_0^\infty \frac{x|\varphi^{(j)}(x)|}{p_1(x)}\, dx < \infty, \quad 0 \leqslant j \leqslant k \quad (k > 0). \tag{3.5}$$

Определим функции

$$u(t) \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{2p_1(x)}\, e^{itx} dx, \quad t \in \mathbf{R},$$

$$f(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \iint_{x+iy \in \mathbf{C}_+} \frac{u(x) e^{-p^*(y)}}{z - x - iy}\, dxdy. \tag{3.6}$$

Тогда

$$f \in S_k, \quad \lim_{\substack{|z| \to \infty \\ z \in \mathbf{C}_+}} f(z) = 0,$$

$$T_{f,0}(x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 0, \\ \varphi(-x), & x < 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

(б) *Обратно, если* $f \in S_k \cap L^\infty(\mathbf{C}_+)$, *то существуют пределы* $T_{f,0}(x)$, $\operatorname{supp} T_{f,0} \subset \subset \mathbf{R}_- \cup \{0\}$, $T_{f,0} \in C^{(k-2)}(\mathbf{R})$, *причем при* $x < 0$, $j \leqslant k-2$

$$|T_{f,0}^{(j)}(x)| < c \exp(p(|x|) + |x|). \tag{3.8}$$

Доказательство. (а) Из условия (3.5) вытекает, что $u \in C^1(\mathbf{R})$ и что

$$|u(t)| \leqslant c(1 + |t|)^{-k}. \tag{3.9}$$

Отсюда и из условия (3.1) следует суммируемость функции $u(x) e^{-p^*(y)}$. Далее, из (3.9) и из того, что числитель подынтегрального выражения в правой части (3.6) непрерывно дифференцируем, следуют ограниченность f и равенство

$$\bar{\partial} f(z) = u(\operatorname{Re} z) e^{-p^*(\operatorname{Im} z)}.$$

Докажем, что

$$|f(z)| = O(|z|^{-k-1}), \quad z \in C_+, \ |z| \to \infty. \tag{3.10}$$

Действительно,

$$\iint_{x+iy \in \mathbf{C}_+} (x+iy)^j u(x) e^{-p^*(y)}\, dxdy =$$

$$= \sum_{s=0}^{j} \iint_{x+iy \in \mathbf{C}_+} C_j^s x^s (iy)^{j-s} u(x) e^{-p^*(y)}\, dxdy =$$

$$= \sum_{s=0}^{j} \int_0^\infty C_j^s (iy)^{j-s} e^{-p^*(y)}\, dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^s u(x)\, dx =$$

$$= \sum_{s=0}^{j} C_j^s \left(\frac{\varphi}{2p_1}\right)^{(s)} (0) \int_0^\infty (iy)^{j-s} e^{-p^*(y)}\, dy = 0$$

при $j \leqslant k$, поскольку $p_1 \in C^\infty, p_1(0) > 0, \varphi \in C^k, \varphi^{(s)}(0) = 0, 0 \leqslant s \leqslant k$.

Поэтому

$$|f(z)| = \frac{1}{\pi} \left| \iint_{\mathbf{C}_+} \bar{\partial} f(\zeta) \left(\frac{1}{z-\zeta} - \frac{1}{z} - \frac{\zeta}{z^2} - \ldots - \frac{\zeta^{k-1}}{z^{k-1}}\right) dm_2(\zeta) \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left| \iint_{\mathbf{C}_+} \bar{\partial} f(\zeta) \frac{\zeta^k}{z^k} \frac{1}{z-\zeta} dm_2(\zeta) \right| = \frac{1}{\pi |z|^k} \left| \iint_{\mathbf{C}_+} \frac{\zeta^k \bar{\partial} f(\zeta)}{z-\zeta} dm_2(\zeta) \right| =$$

$$= \frac{1}{|z|^k} O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad |z| \to \infty.$$

Докажем теперь равенство (3.7). Существование пределов $T_{f,0}$ вытекает из леммы 3.3. Ввиду (3.10) $T_{f,0}(x) = 0$ при $x \geqslant 0$. При $x < 0$, используя условие (3.5), получаем

$$T_{f,0}(x) = \lim_{y \to \infty} \frac{1}{2\pi \cdot \pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(h+iy)x} dh \int_0^y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(r) e^{-p^*(s)}}{h+iy-r-is} ds dr =$$

$$= \lim_{y \to \infty} \lim_{\mathbf{R} \to y-0} \frac{1}{2\pi \cdot \pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihx - xy} dh \int_0^{\mathbf{R}} \int_{-\infty}^{\infty} u(r) e^{-p^*(s)} \frac{1}{h+iy-r-is} ds dr =$$

$$= \lim_{y \to \infty} \lim_{\mathbf{R} \to y-0} \frac{1}{2\pi \cdot \pi i} e^{-xy} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihx} dh \int_0^{\mathbf{R}} \int_{-\infty}^{\infty} u(r) e^{-p^*(s)} ds dr \cdot i \int_0^\infty e^{(s-y)t - i(r-h)t} dt =$$

$$= \lim_{y \to \infty} \lim_{\mathbf{R} \to y-0} \frac{1}{2\pi \cdot \pi} e^{-xy} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihx} dh \int_0^{\mathbf{R}} \int_0^\infty e^{-p^*(s)} e^{(s-y+ih)t} ds dt \int_{-\infty}^{\infty} u(r) e^{-irt} dr =$$

$$= \lim_{y \to \infty} \lim_{\mathbf{R} \to y-0} \frac{1}{2\pi \cdot \pi} e^{-xy} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihx} dh \int_0^{\mathbf{R}} \int_0^\infty e^{-p^*(s)} e^{(s-y+ih)t} \cdot 2\pi \frac{\varphi(t)}{2p_1(t)} ds dt.$$

Поскольку

$$\frac{\varphi(t)}{p_1(t)} e^{-yt} \int_0^{\mathbf{R}} e^{-p^*(s)} e^{st} ds$$

— C^k-гладкая на $\mathbf{R}$ функция, экспоненциально убывающая при $t \to \infty$, можно воспользоваться формулой обращения.

$$T_{f,0}(x) = \lim_{y \to \infty} \lim_{\mathbf{R} \to y-0} e^{-xy} \int_0^{\mathbf{R}} e^{-p^*(s)} e^{-(s-y)x} \frac{\varphi(-x)}{2p_1(-x)} ds =$$

$$= \frac{\varphi(-x)}{p_1(-x)} \lim_{y \to \infty} \lim_{\mathbf{R} \to y-0} \int_0^{\mathbf{R}} e^{-p^*(s)} e^{-sx} ds = \varphi(-x).$$

(б) В обратную сторону ясно, что

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in \mathbf{C}_+}} f(z)=0.$$

Из леммы 3.3 следует существование пределов $T_{f,0}(x)$ и то, что $T_{f,0}\in C^{k-2}$. Ясно, что $\operatorname{supp} T_{f,0}\subset \mathbf{R}_-\cup\{0\}$. Проверим неравенство (3.8).

По формуле (3.3)

$$|T_{f,0}^{(j)}(x)|=|T_{f,j}(x)|\leqslant\Big|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} z^j f(z)e^{izx}dz\Big|+\Big|\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbf{C}_+} z^j\bar\partial f(z)e^{izx}dm_2(z)\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}|t|^j|f(t)|dt+\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbf{C}_+}|z^j\bar\partial f(z)|e^{-x\operatorname{Im}z}dm_2(z)\leqslant$$

$$\leqslant \text{const}+\text{const}\cdot\sup_{z\in\mathbf{C}_+} e^{-x\operatorname{Im}z-p^*(\operatorname{Im}z-1)}=\text{const}+\text{const}\exp(p(-x)-x).$$

„Аналитическая часть" преобразования Дынькина есть обычный интеграл Фурье:

Лемма 3.5. (а) *Пусть носитель функции φ, $\varphi\in C^k(\mathbf{R})$, лежит в $\mathbf{R}_+$, φ и вес p удовлетворяют условию*

$$\int_0^\infty|\varphi^{(j)}(x)|e^{p(x)}dx<\infty,\ 0\leqslant j\leqslant k,$$

$$f(z)\overset{\text{def}}{=}\int_0^\infty\varphi(x)e^{-ixz}dx.$$

Тогда

$$f\in A(\mathbf{C})\cap H^\infty(\mathbf{C}_-),$$

$$|f(z)|\leqslant c(1+|\operatorname{Re}z|)^{-k}e^{p^*(\operatorname{Im}z)},\ z\in\overline{\mathbf{C}}_+.$$

(б) *В обратную сторону, если $f\in A(\mathbf{C})\cap H^\infty(\mathbf{C}_-)$, $k\geqslant 2$,*

$$|f(z)|\leqslant(1+|\operatorname{Re}z|)^{-k}e^{p^*(\operatorname{Im}z)},\ z\in\overline{\mathbf{C}}_+,$$

то выражения

$$T_{f,0}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{R}+iy}f(z)e^{izx}dz,\ \textit{не зависят от } y,$$

$$T_{f,0}\in C^{k-2}(\mathbf{R}),\ \operatorname{supp}T_{f,0}\subset\mathbf{R}_+,$$

$$|T_{f,0}^{(j)}(x)|\leqslant ce^{-p(x)},\ 0\leqslant j\leqslant k-2. \tag{3.11}$$

Доказательство. (а) Интегрируя по частям, получаем

$$|z^kf(z)|=\Big|\int_0^\infty\varphi^{(k)}(x)e^{-ixz}dx\Big|\leqslant\sup_x\frac{|e^{-ixz}|}{e^{p(x)}}=$$

$$=\exp(\sup_x(x\operatorname{Im}z-p(x)))=\exp p^*(\operatorname{Im}z),\ \operatorname{Im}z\geqslant 0.$$

Если $\operatorname{Im} z < 0$, то $|z^k f(z)| \leqslant \mathrm{const}$.

(б) В обратную сторону, существование пределов $T_{f,0}(x)$ и C^{k-2}-гладкость функции $T_{f,0}$ следуют, например, из леммы 3.3 и того, что $f \in S_k$.

При $x \leqslant 0$ функция $f(z)e^{izx}$ лежит в $H^\infty(\mathbf{C}_-) \cap L^1(\mathbf{R})$,

$$\int_{\mathbf{R}} f(z)e^{izx}dz = 0.$$

При $x > 0$

$$|T_{f,0}^{(j)}(x)| \leqslant \inf_y \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} (1+|t|)^{j-k} e^{p^*(y)} e^{-xy} dt \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \cdot \exp(\inf_y (p^*(y) - xy)) = \mathrm{const} \cdot \exp(-p(x)).$$

3.4. Определим теперь по весу p, удовлетворяющему условиям (3.1) и (3.2), следующие пространства:

пространство гладких функций асимметричного роста:

$$\mathfrak{A} \overset{\mathrm{def}}{=} \Big\{ f \in C^\infty(\mathbf{R}) \colon \exists\, c > 0\, \forall\, k \exists c_1, |f^{(k)}(-x)| \leqslant c_1 e^{-cp(x)},\ x < 0,$$
$$\forall\, c > 0\, \forall\, k \exists c_1, |f^{(k)}(x)| \leqslant c_1 e^{cp(x)},\ x \geqslant 0 \Big\},$$

пространство почти аналитических функций:

$$Q \overset{\mathrm{def}}{=} \Big\{ f \in C^1(\mathbf{C}_+) \cap C(\overline{\mathbf{C}}_+) \colon$$
$$\forall\, c < \infty\, \forall\, k \exists c_1,\ |\bar\partial f(z)| \leqslant c_1(1+|\operatorname{Re} z|)^{-k} e^{-cp^*(\operatorname{Im} z)},$$
$$\exists\, c < \infty\, \forall\, k\ \ c_1,\ |f(z)| \leqslant c_1(1+|\operatorname{Re} z|)^{-k} e^{cp^*(\operatorname{Im} z)} \Big\},$$

пространство почти аналитических функций, исчезающих на бесконечности:

$$J \overset{\mathrm{det}}{=} \Big\{ f \in Q \colon \forall\, c < \infty\, \forall\, k \exists c_1, |f(z)| \leqslant c_1(1+|\operatorname{Re} z|)^{-k} e^{-cp^*(\operatorname{Im} z)} \Big\}.$$

Ясно, что $Q \subset \bigcap\limits_{k<\infty} S_k$.

Лемма 3.6. *Если вес p удовлетворяет условиям* (3.1) *и* (3.2), *то*

(а) $\mathfrak{A}$ *и* Q *становятся топологическими алгебрами относительно соответственно свертки и умножения, если снабдить их естественной топологией суммы индуктивного и проективного пределов (или ее замкнутого подпространства),* J *является идеалом в* Q.

(б) *Отображение* d, *сопоставляющее функции* $f(z)$ *функцию* $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}+iy} f(z) \times$ $\times\, e^{-izx}dz$, *действует непрерывно из* Q *в* $\mathfrak{A}$.

(в) $d(J) = 0$.

(г) $\operatorname{Ker} d = J$, J – *замкнутый идеал в* Q.

Доказательство. (а) проверяется стандартно, используя лемму 3.2.

(б) Пусть $f \in C^1(\mathbf{C}_+) \cap C(\overline{\mathbf{C}}_+)$ и для любого k найдется c такое, что

$$|\bar\partial f(z)| \leqslant c_1(1+|\operatorname{Re} z|)^{-k} e^{-2p^*(\operatorname{Im} z)},$$

$$|f(z)| \leqslant c_1(1+|\operatorname{Re} z|)^{-k} e^{p^*(\operatorname{Im} z)}.$$

Разложим функцию f в сумму v_f и (w_f+K_f) (см. лемму 3.3 (в)). Тогда для любого k

$$v_f \in A(\mathbf{C}) \cap H^\infty(\mathbf{C}_-) \cap S_k,$$

$$e^{iz} w_f(z) \in H^\infty(\mathbf{C}_+) \cap S_k,$$

поэтому

$$d(\tilde{f}) = d(v_f) + d(w_f+K_f), \ v_f \in Q.$$

По лемме 3.4 (б), так как $w_f+K_f=f-v_f \in S_k$, для любого k существует c_1 такое, что

$$|(d(e^{iz}(w_f+K_f)(z)))^{(k)}(x)| \leqslant c_1 \exp(p(|x|+1)+|x|+1), \ x>0,$$

$$|(d(e^{iz}(w_f+K_f)(z)))^{(k)}(x)| \leqslant c_1, \ x \leqslant 0.$$

Учитывая условие (3.2) и применяя лемму 3.5 (б), получаем, что для любого k найдется c_1 такое, что

$$|(d(v_f))^{(k)}(x)| < c_1 e^{-p(-x)}, \ x \leqslant 0,$$

$$(d(v_f))(x) = 0, \ x>0.$$

Искомое утверждение следует теперь из условия (3.2).

(в) Утверждение проверяется непосредственно.

(г) Пусть $T_{f,0} \equiv 0, \hat{v}_f(x) = 0$ при $x>1$.

Домножая f на e^{iz}, можно считать, что

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in \mathbf{C}_+}} f(z) = 0.$$

Закрепим $y \in [1,\infty)$.
Пусть

$$f_1(z) \overset{\text{def}}{=} f(z) - \frac{1}{\pi} \iint_{\operatorname{Im}\zeta>y} \frac{\bar\partial f(\zeta)}{z-\zeta} dm_2(\zeta),$$

$$h(x) \overset{\text{def}}{=} f_1(x+2iy), \ x \in \mathbf{R}.$$

Чтобы доказать малость $|h(x)|$, оценим преобразование Фурье функции h. Для любых c и k найдется c_1 такое, что

$$|\bar\partial f(z)| \leqslant c_1 (1+|\operatorname{Re} z|)^{-k} e^{-p^*(c \operatorname{Im} z)}.$$

$$\text{(i)} \quad |\hat{h}(x)| = \left|\int_{\mathbf{R}} h(t) e^{-ixt} dt\right| = \left|e^{-2xy} \int_{\mathbf{R}+2iy} f_1(z) e^{-ixz} dz\right| =$$

$$= e^{-2xy} \left|\int_{\mathbf{R}+iy} f_1(z) e^{-ixz} dz\right| \leqslant c_1 e^{-xy}.$$

$$\text{(ii)} \quad |\hat{h}(x)| = \left|\int_{\mathbf{R}} h(t) e^{-ixt} dt\right| = \left|e^{-2xy} \int_{\mathbf{R}+3iy} f_1(z) e^{-ixz} dz\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_1 e^{-p^*(cy)} e^{xy} + |e^{-2xy} \int_{\mathbf{R}+3iy} f(z) e^{-ixz} dz|.$$

Далее,

$$|e^{-2xy} \int_{\mathbf{R}+3iy} f(z) e^{-ixz} dz| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-2xy} \Big(\iint_{3y < \operatorname{Im} z < Y} e^{x \operatorname{Im} z} |\bar{\partial} f(z)| \, dm_2(z) + |\int_{\mathbf{R}+iY} f(z) e^{-ixz} dz| \Big).$$

Поскольку $\int_{\mathbf{R}+iY} f(z) e^{-ixz} dz \to 0$ при $Y \to \infty$,

$$|\hat{h}(x)| \leqslant c_1 e^{-p^*(cy)} e^{xy} + e^{-2xy} \iint_{\operatorname{Im} z > 3y} e^{x \operatorname{Im} z} |\bar{\partial} f(z)| \, dm_2(z) \leqslant$$

$$\leqslant c_1 e^{-p^*(cy) + xy} + c_1 e^{-2xy} \int_{3y}^{\infty} e^{xt - p^*(ct)} dt.$$

Аналогично для любых c и k найдется c_1 такое, что

$$|\hat{h}^{(k)}(x)| \leqslant c_1 e^{-xy},$$

$$|\hat{h}^{(k)}(x)| \leqslant c_1 e^{-p^*(cy) + xy} + c_1 e^{-2xy} \int_{3y}^{\infty} e^{xt - p^*(ct)} dt.$$

Далее,

$$2\pi |t^k h(t)| = |\int_{\mathbf{R}} \hat{h}^{(k)}(x) e^{itx} dx|.$$

Пусть $x_0 = p^*(cy)/(2y)$.
Тогда

$$2\pi |t^k h(t)| \leqslant |\int_{-\infty}^{x_0} \hat{h}^{(k)}(x) e^{itx} dx| + |\int_{x_0}^{\infty} \hat{h}^{(k)}(x) e^{itx} dx| \leqslant$$

$$\leqslant c_1 e^{-p^*(cy) + x_0 y} + c_1 e^{-x_0 y} + c_1 \int_{-\infty}^{x_0} e^{-2xy} dy \int_{3y}^{\infty} e^{xt - p^*(ct)} dt \leqslant$$

$$\leqslant c_1 e^{-p^*(cy)/2} + c_1 e^{-2x_0 y} \int_{3y}^{\infty} e^{-p^*(ct) + x_0 t} dt.$$

Применяя лемму 3.2, получаем искомое утверждение:

Для любых c и k найдется c_1 такое, что

$$|t^k h(t)| \leqslant c_1 e^{-p^*(cy)},$$

$$|f(z)| \leqslant c_1 (1 + |\operatorname{Re} z|)^{-k} e^{-p^*(cy)}.$$

Теорема 3.1. *Отображение d, действующее из Q/J в $\mathcal{H}$,*

$$(d(f+J))(x) = \lim_{y \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}+iy} f(z) e^{-izx} dz,$$

есть изоморфизм топологических алгебр.

Доказательство. Мы используем здесь лемму 3.6.

Из (а) следует, что Q/J есть топологическая алгебра. Из (г) следует, что отображение d определено корректно. Линейность d очевидна. Из (б) следует, что d – непрерывный оператор. Биективность d вытекает из того, что существует обратное отображение. Действительно, если $g \in \mathcal{H}$, то найдутся $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ так, что $g = h_1 + h_2$, $\operatorname{supp} h_1 \subset (-\infty, 1)$, $\operatorname{supp} h_2 \subset (0, \infty)$. Применяя к функции h_2 лемму 3.4 (а), а к функции $x \to h_1(-x)$ лемму 3.5 (а) и складывая получающиеся функции $e^{iz} f_1(z)$ и f_2, получаем почти аналитическую функцию f. Из тех же лемм 3.4 (а) и 3.5 (а) следует, что $f \in Q$,

$$d(f) = d(e^{iz} f_1(z)) + d(f_2) = h_1 + h_2 = g.$$

Следовательно, d есть гомеоморфизм между Q/J и $\mathcal{H}$.

Мультипликативность d достаточно проверить на множестве преобразований Фурье функций из $C_0^\infty(\mathbf{R})$, где она очевидна. Итак, d есть изоморфизм топологических алгебр.

Отображение, обратное к d, называется обобщенным преобразованием Фурье или преобразованием Дынькина в непрерывном случае.

Отметим, что оно согласовано с преобразованием Фурье.

3.5. Всюду далее будем предполагать, что вес p удовлетворяет условиям (3.1) и (3.2).

Установим следующую простую лемму об оценке множества малости почти аналитической функции в $\mathbf{C}_+$.

Лемма 3.7. *Если $f \in Q$, $|f(z)| < \exp p^*(\operatorname{Im} z)$, $\beta > 0$, и существует последовательность чисел $\{y_k\}$, $y_k \to \infty$, удовлетворяющих условию*

$$m(E_B(f) \cap [-Ay_k + iy_k, Ay_k + iy_k]) > \beta A y_k,$$

то $f \in J$.

(Здесь $E_c(f) \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbf{C}_+,\ |f(z)| < \exp(-p^*(c \operatorname{Im} z))\}$, m – мера Лебега, постоянные *A, B зависят лишь от β и p).*

Доказательство. (а) Пусть $2^m \leqslant y_k < 2^{m+1}$,

$$\Omega_m \overset{\text{def}}{=} \{z : 2^{m-2} < \operatorname{Im} z < y_k,\ |\operatorname{Re} z| < Ay_k\},$$

$$I \overset{\text{def}}{=} [-A + i, A + i],\ I_m \overset{\text{def}}{=} 2^{m-1} I,$$

$$\omega(z) \overset{\text{def}}{=} \omega(z, E_B(f) \cap y_k I, \Omega_m),$$

где $\omega(\cdot,\cdot,\cdot)$ – гармоническая мера.
Из геометрических соображений видно, что

$$\omega(z) \geqslant c(\beta, A) > 0,\ z \in I_m.$$

Учитывая, что функция

$$f_1(z) = f(z) - \frac{1}{\pi} \iint_{\operatorname{Im} z > 2^{m-2}} \frac{\bar\partial f(z)}{z - \zeta}\, dm_2(\zeta)$$

аналитична в Ω_m и отличается от $f(z)$ не более чем на $c_1 \exp(-p^*(2By_k))$ для больших y_k, получим что при $z \in I_m$

$$\log|f_1(z)| \leqslant \int_{\partial\Omega} \log|f_1(\zeta)|\,\omega(z,d\zeta,\Omega) <$$

$$< \sup_{\zeta\in\partial\Omega} \log|f_1(\zeta)| + \inf_{z\in I_m} \omega(z) \cdot \sup_{\zeta\in E_B(f)\cap y_k I} \log|f_1(\zeta)| \leqslant$$

$$\leqslant p^*(y_k) - c(\beta, A)p^*(By_k) < -2p^*\left(\frac{B}{2c(\beta,A)}\, y_k\right),$$

$$I_m \subset E_{\frac{B}{2c(\beta,A)}}(f).$$

(Последнее неравенство выполняется благодаря тому, что $p^*(x)/x$ возрастает).

Пусть $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$ – число, которое будет определено ниже, $\gamma \overset{\text{def}}{=} \frac{B}{2c(\beta,A)}$. Далее,

$$\Omega_{s,k} \overset{\text{def}}{=} \left\{z : 2^s\alpha < \operatorname{Im} z < 2^s,\ |\operatorname{Re} z| < (2^{m-2}+2^{s-1})A\right\},\ s<m,$$

$$I_{s,k} \overset{\text{def}}{=} [-(2^{m-2}+2^{s-2})A + 2^{s-1}i,\ (2^{m-2}+2^{s-2})A + 2^{s-1}i],\ s\leqslant m.$$

Тогда $I_{m,k} = I_m$.

(б) Докажем теперь по индукции, что при подходящих A, B и α для всех достаточно больших $s > s_0$ (A, B, α и s_0 зависят лишь от p и β),

$$I_{s,k} \subset E_\gamma(f).$$

Оценивая гармоническую меру,

$$\inf_{z\in I_{s,k}} \omega(z, I_{s+1,k}, \Omega_s) > \frac{2-\alpha}{4}(1-e^{-A/2}),$$

и рассуждая, так же как в п. (а), получаем:

если $I_{s+1,k} \subset E_\gamma(f)$, $s\leqslant m$, то

$$\log\left|f(z) - \frac{1}{\pi}\iint_{\operatorname{Im} z>2^s\alpha} \frac{\bar\partial f(\zeta)}{z-\zeta}\, dm_2(\zeta)\right| \leqslant$$

$$\leqslant p^*(2^s) - \frac{2-\alpha}{4}(1-e^{-A/2})p^*(2^s\gamma) < -p^*(2^{s-1}\gamma) - 1,\ z\in I_{s,k},$$

при условии, что

$$\gamma\left(2^{1+\epsilon}\left(\frac{2-\alpha}{4}\right)(1-e^{-A/2}) - 1\right) > 2,$$

где ϵ определяется в лемме 3.2 (а).

Наконец,

$$\forall c\ \exists c_1,\ \left|\iint_{\operatorname{Im} z>2^s\alpha} \frac{\bar\partial f(\zeta)}{z-\zeta}\, dm_2(\zeta)\right| \leqslant c_1 \exp(-p^*(c\cdot 2^s\alpha)).$$

Выберем теперь числа

$$a < \frac{\epsilon}{10},\ A > 2\log\frac{10}{\epsilon},\ B > 4c(\beta, A)\,(2^{\epsilon/2}-1)^{-1}.$$

Получим, что для достаточно больших $s, s_0 < s \leqslant m$,

$$I_{s,k} \subset E_\gamma(f).$$

Итак, для всех достаточно больших s, $s > s_0$, для всех достаточно больших k, $k > 2^{s-1}$,

$$I_{s,k} \subset E_\gamma(f).$$

Следовательно, при $s > s_0$

$$\mathbf{R} + 2^s i \subset E_\gamma(f),$$

$T_{f,0} \equiv \theta$, $f \in J$. Лемма доказана.

Пусть

$$\mathcal{O}\!\mathcal{L}_\pm \overset{\text{def}}{=} \left\{ f \in \mathcal{O}\!\mathcal{L} : \operatorname{supp} f \subset \mathbf{R}_\pm \right\},$$

$$Q_\pm \overset{\text{def}}{=} d^{-1}(\mathcal{O}\!\mathcal{L}_\mp) + J.$$

Лемма 3.8.

(а) $Q_+ = Q \cap A(\mathbf{C}) \cap H^\infty(\mathbf{C}_-) + J$.

(б) $Q_- = Q \cap L^\infty(\mathbf{C}_+)$.

Доказательство. (а) Пусть $f \in Q_+$. Тогда $T_{f,0} \in \mathcal{O}\!\mathcal{L}_-$. По лемме 3.5 (а) найдется $g \in Q \cap A(\mathbf{C}) \cap H^\infty(\mathbf{C}_-)$ такая, что $T_{g,0} = T_{f,0}$. По лемме 3.6 (г) $f \in Q \cap A(\mathbf{C}) \cap H^\infty(\mathbf{C}_-) + J$.

(б) Пусть $f \in Q_-$, $g(z) \overset{\text{def}}{=} e^{-iz} f(z)$. Тогда $T_{g,0}(x) = 0$, $x \geqslant 1$, следовательно, $\hat{v}_g(x) = 0, x \geqslant 1$,

$$2\pi \cdot |v_g(z)| = \left| \int_0^\infty \hat{v}_g(x) e^{-izx} dx \right| < ce^{\operatorname{Im} z}.$$

Поэтому

$$|f(z)| = e^{-\operatorname{Im} z}|g(z)| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\operatorname{Im} z}\left(|K_g(z)| + |w_g(z)| + |v_g(z)|\right) \leqslant \text{const}.$$

Включения $Q \cap A(\mathbf{C}) \cap H^\infty(\mathbf{C}_-) \subset Q_+$ и $Q \cap L^\infty(\mathbf{C}_+) \subset Q_-$ очевидны.

3.6. Здесь теоремы о сверточных уравнениях из § 1 переформулируются в терминах почти аналитических функций. Предполагаем, что вес p удовлетворяет (3.1) и (3.2).

Теорема 3.2. *Алгебра Q/J не содержит делителей нуля.*

Теорема 3.3. *Если вес p удовлетворяет условию*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{x \log x} = \infty,$$

а функции $f, g \in Q$ таковы, что $fg \in Q_- \setminus J$, то для некоторого c

$$|f(z)| + |g(z)| < c\exp(c\operatorname{Im} z).$$

Теорема 3.4. *Если функция $f \in Q$, функции g, $fg \in Q_- \setminus J$, то для некоторого c*

$$|f(z)| + |g(z)| < c\exp(c\operatorname{Im} z).$$

Доказательство теоремы 3.2. Если $fg \in J$.

$$\max(|f(z)|, |g(z)|) < \exp p^*(\operatorname{Im} z),$$

то, полагая $\beta = {}^1/_2$, получим, что для некоторого y_0

$$\mathbf{R} + i\,[y_0, \infty) \subset E_{2B}(fg),$$

поэтому для каждого $y > y_0$

$$\max\Big\{m(E_B(f) \cap [-Ay+iy, Ay+iy]), m(E_B(g) \cap [-Ay+iy, Ay+iy])\Big\} \geqslant \frac{Ay}{2},$$

где A и B определяются в лемме 3.7.

Применяя ее, получим, что по крайней мере одна из функций f, g лежит в J.

Теоремы 3.3 и 3.4 доказываются в следующем параграфе.

Обратимся теперь к теоремам о сверточных уравнениях.

Доказательство теоремы 1.1 Не умаляя общности, считаем, что $p \in C^\infty$, p строго выпукла. Пусть μ, ν удовлетворяют условиям теоремы,

$$f, g \in C^\infty(\mathbf{R}),\ \operatorname{supp} f,\ \operatorname{supp} g \subset (0, 1).$$

Если $\mu * \nu = 0$, то $(\mu * f) * (\nu * g) = 0$,

$$\mu * f,\ \nu * g \in \mathfrak{A}.$$

Из теорем 3.1 и 3.2 следует, что одна из этих функций (пусть $\mu * f$) есть 0. Из произвольности выбора f (не умаляя общности $\nu * g \not\equiv 0$) вытекает, что $\forall\, t$, $\mu * \chi_{[0, t]} \equiv 0$, следовательно, $\mu = 0$.

Доказательство теорем 1.2 и 1.3 проводится с применением этой же процедуры сглаживания и теоремы 3.1. При этом используются соответственно теоремы 3.3 и 3.4, а также стандартная теорема Титчмарша.

Замечание. В отличие от дискретного случая (которому соответствуют пространства почти аналитических функций с оценками на рост модуля и убывание $\bar\partial$-производной, зависящими лишь от радиуса) здесь не удается установить наличие факторизации

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_+ * \mathfrak{A}_-,\quad Q = Q_+ \cdot Q_- + J.$$

В действительности даже вопрос о разложении произвольной функции из $C_0^\infty(\mathbf{R})$ в свертку двух таких функций весьма сложен (см. [18]).

§ 4. Доказательство теорем о почти аналитических функциях

4.1. Здесь доказываются теоремы 3.3 и 3.4. Сначала, и это составляет общую часть доказательств, утверждения о почти аналитических функциях в $\mathbf{C}_+$ сводятся к утверждениям об аналитических функциях в несколько меньших областях. При этом используются утверждения аналогичные приведенным в [6, 9, 17]. С помощью оценок конформных отображений задача сводится к случаю функций из A $(\mathbf{C}_+)$.

Далее применяются теоремы единственности для почти аналитических функций: модификация одного результата И. В. Островского [4, 5] (для доказательства теоремы 3.3) и теорема Линделёфа.

Наконец, завершение доказательств также является общим.

4.2. Итак, пусть $h \overset{\text{def}}{=} fg \in Q_-$. По лемме 3.8, $h \in L^\infty(\mathbf{C}_+)$.

Не умаляя общности, можно считать, что

$$|f(z)| + |g(z)| < \exp p^*(\operatorname{Im} z),$$
$$|h(z)| < 1,$$

для любого c найдется c_1 такое, что

$$|\bar\partial f(z)| < c_1(1+|\operatorname{Re} z|)^{-2}\exp(-p^*(c\operatorname{Im} z)),$$
$$|\bar\partial g(z)| < c_1(1+|\operatorname{Re} z|)^{-2}\exp(-p^*(c\operatorname{Im} z)).$$

Рассмотрим множество всех прямоугольников

$$\Pi = \Pi_{z_1, z_2} \overset{\text{def}}{=} [\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Re} z_2] + i\,[\operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2]$$

таких, что $z_1, z_2 \in E_{B_1}(h)$, где B_1 будет определено ниже,

$$\frac{1}{10}\min(\operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2) < |z_1 - z_2| < 10\min(\operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2),$$

и найдется кривая l,

$$l \subset E_{B_1}(h) \cap \Big\{ z \in \mathbf{C}_+ : |z - z_1| \leqslant |z_1 - z_2| \Big\},$$

соединяющая точки z_1 и z_2.

Каждому такому прямоугольнику Π сопоставим трапецию T, у которой верхнее основание совпадает с верхней стороной Π, нижнее основание лежит на $\mathbf{R}$, а углы при нижнем основании равны $\pi/4$.

Обозначим объединение этих трапеций через $U = U(B_1)$.

Проверим, что для некоторых y и B_1, зависящих лишь от p и B_2,

$$U(B_1) \cap \Big\{ z \in \mathbf{C}_+, \operatorname{Im} z > y \Big\} \subset E_{B_2}(h)$$

(B_2 будет выбрано ниже).

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству леммы 3.7.

Действительно, пусть Π – один из рассматриваемых прямоугольников,

$$x = (\operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2)/2,$$

$$y_1 = \min(\operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2), \; y_2 = \max(\operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2),$$

$$\Omega = \left\{ z \in \mathbf{C}_+, \; y_1/2 < \operatorname{Im} z < 2y_2, \; x - Ay_2 < \operatorname{Re} z < x + Ay_2 \right\},$$

$$I = [x - Ay_2 + y_2 i, \; x + Ay_2 + y_2 i],$$

где A будет выбрано позже.

Из геометрических соображений видно, что

$$\inf_{z \in I} \omega(z, l, \Omega \backslash l) \geqslant c(A) > 0.$$

Рассуждая, как в доказательстве леммы 3.7, получаем, что $I \subset E_{c(A)B_1/20}(h)$ при $c(A)B_1 > 40$ и достаточно большом y_1, $y_1 \geqslant y_0$ (где y_0 зависит лишь от p, B_1 и A).

Далее, снова рассуждая, как в доказательстве леммы 3.7, можно показать, что

$$[x - Ay_2/2, x + Ay_2/2] + i\,[y_0, y_2] \subset E_{c(A)B_1/20}(h),$$

если $A > c_1(\epsilon)$, $B_1 > c_2(A)/\epsilon$, где ϵ определяется по p в лемме 3.2.

Выбрав теперь $A > \max(c_1(\epsilon), 2)$,

$$B_1 > \max(c_2(A)/\epsilon, 20B_2/c(A)),$$

получим

$$T \cap \left\{ \operatorname{Im} z > y_0 \right\} \subset E_{B_2}(h).$$

4.3. Рассмотрим далее компоненты связности V_j множества

$$E_{B_1}(h) \backslash (U \cup \left\{ z \in \mathbf{C}_+ : \operatorname{Im} z < 10 y_0 \right\}),$$

где B_1 и y_0 определяются по B_2, как в п. 4.2.

Если бы какая-то V_j удовлетворяла соотношению

$$\operatorname{diam} V_j > \frac{1}{5} \operatorname{dist}(V_j, \mathbf{R}),$$

то нашлись бы $z_1, z_2 \in V_j$ такие, что

$$|z_1 - z_2| = \frac{1}{10} \min(\operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2),$$

и такая кривая l, соединяющая z_1 и z_2, что

$$l \subset V_j \cap \left\{ z \in \mathbf{C}_+ : |z - z_1| < |z_1 - z_2| \right\}.$$

Соответствующий прямоугольник Π_{z_1, z_2} по определению лежит в множестве U. В то же время $z_1, z_2 \notin U$.

Полученное противоречие доказывает, что все компоненты V_j удовлетворяют соотношению

$$\operatorname{diam} V_j \leqslant \frac{1}{5} \operatorname{dist}(V_j, \mathbf{R}).$$

Сопоставим каждой компоненте V_j круг K_j с центром z_j и радиусом $\frac{3}{5}\operatorname{dist}(V_j, \mathbf{R})$ так, чтобы

$$V_j \subset \frac{2}{3}K_j,\ z_j \notin E_{B_1}(h),\ \operatorname{dist}(K_j, \mathbf{R}) > \operatorname{dist}(V_j, \mathbf{R})/2.$$

По лемме Халла (см. [19], с. 362) для круга, в кругах K_j содержатся множества K_j',

$$K_j' = \left\{ z \in \mathbf{C}_+ : |z - z_j| \in E_j \right\},$$

такие, что

$$E_j \subset \left(\frac{2}{5} \operatorname{dist}(V_j, \mathbf{R}),\ \frac{1}{2} \operatorname{dist}(V_j, \mathbf{R}) \right),$$

$$mE_j > \frac{1}{20} \operatorname{dist}(V_j, \mathbf{R}),$$

$$K_j' \cap E_{B_3}(h) = \emptyset, \tag{4.1}$$

где $B_3 = cB_1$, $c < \infty$ – абсолютная константа.

4.4. Теперь „выметем" меру $\bar\partial f dm_2$ с множества $E_{B_3+1}(f)$ и домножим получившуюся функцию на ограниченный сомножитель так, что произведение станет аналитической функцией. Учтем при этом, что $E_{B_3+1}(f) \subset E_{B_3}(h)$.

Пусть

$$f_{1,j}(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\zeta \in V_j \cap E_{B_3}(h)} \frac{\bar\partial f(\zeta)}{z - \zeta}\, dm_2(\zeta),$$

$$f_{2,j}(z) \overset{\text{def}}{=} \chi_{E_j}(|z - z_j|) \frac{1}{mE_j} f_{1,j}(z) \frac{z - z_j}{|z - z_j|},$$

$$f_{3,j}(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\zeta \in K_j'} \frac{f_{2,j}(\zeta)}{z - \zeta}\, dm_2(\zeta).$$

Тогда

$$f_{3,j} = f_{1,j} \text{ на } \mathbf{C}_+ \backslash K_j. \tag{4.2}$$

Введем функцию f_1,

$$f_1 \overset{\text{def}}{=} \bar\partial f \cdot \sum_j \chi_{V_j \cap E_{B_3}(h)} - \sum_j f_{2,j}.$$

Ясно, что для любых c и k найдется c_1 такое, что

$$|f_1(z)| < c_1 (1 + |\operatorname{Re} z|)^{-k} e^{-p^*(c \operatorname{Im} z)}.$$

Далее, функция f_2,

$$f_2(z) \overset{\text{def}}{=} f(z) - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbf{C}_+} \frac{f_1(\zeta)}{z-\zeta}\, dm_2(\zeta),$$

аналитична на $V^0 \overset{\text{def}}{=} \bigcup\limits_j V_j \cap E_{B_3}(h)$.

В силу (4.1), (4.2) и малости $|\bar\partial f|$

$$\forall\, c\ \forall\, k\ \exists\, c_1,\ |(f-f_2)(z)| < c_1(1+|\operatorname{Re} z|)^{-k} e^{-p^*(c \operatorname{Im} z)},$$

$$|f_2(z)| > \frac{1}{2} \exp(-p^*(B_3 \operatorname{Im} z)),\ z \in K_j'$$

при достаточно большой $\operatorname{Im} z$, $\operatorname{Im} z > y(B_3)$.

Поэтому функция f_3,

$$f_3(z) \overset{\text{def}}{=} \exp\left(-\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\substack{\operatorname{Im} z > y(B_3)\\ z \notin V^0 \cup U}} \frac{\bar\partial f_2(\zeta)}{f_2(\zeta)} \frac{1}{z-\zeta}\, dm_2(\zeta)\right),$$

ограничена в $\mathbf{C}_+$, функция $f_4 \overset{\text{def}}{=} f_2 f_3$ аналитична в $\mathbf{C}_+ \setminus (U \cup \{z : \operatorname{Im} z > y(B_3)\})$.

Аналогично строится функция g_4. Пусть далее $h_4 \overset{\text{def}}{=} f_4 g_4$. Ясно, что

$$\exists\, j_f, j_g, j_h \in J: \lim_{\substack{|z| \to \infty\\ z \in \mathbf{C}_+}} \frac{f+j_f}{f_4} = \lim_{\substack{|z| \to \infty\\ z \in \mathbf{C}_+}} \frac{g+j_g}{g_4} = \lim_{\substack{|z| \to \infty\\ z \in \mathbf{C}_+}} \frac{h+j_h}{h_4} = 1.$$

4.5. Оценим теперь „размер” множества U.

Напомним, что $U \subset E_{B_2}(h)$,

$$f_4, g_4 \in A(V),\ h_4 \in H^\infty(V),$$

где

$$V \overset{\text{def}}{=} \mathbf{C}_+ \setminus (U \cup \{z : \operatorname{Im} z > y(B_2)\}),$$

а B_2 – достаточно большое число. (Далее, f_4 и g_4 рассматриваются именно на V).

Заметим, что, не умаляя общности, можно предположить, что область V ограничена ломаной, все отрезки которой имеют длину не менее 1.

Вследствие леммы 3.7 для достаточно больших B_2 множество U не заполняет угол $\{\pi/4 < \arg z < 3\pi/4\}$, а следовательно, для некоторой $z_* \in \mathbf{C}_+$

$$\{z \in \mathbf{C}_+ : \pi/4 < \arg(z - z_*) < 3\pi/4\} \cap U = \emptyset. \tag{4.3}$$

Зафиксируем такое B_2 (и определяющиеся по нему B_1 и B_3).

Пусть $R \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbf{C}_+ : |\operatorname{Re} z| < (\operatorname{Im} z)^{1+\gamma}\}$, где $\gamma = \min\left(\frac{\epsilon}{4}, \frac{1}{4}\right)$, ϵ определяется в лемме 3.2.

Докажем, что множество $U \cap R$ ограничено. В противном случае пусть

$$\varphi(t) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{dist}(it, U).$$

По (4.3)

$$t/\sqrt{2} + \text{const} < \varphi(t) < t + \text{const}.$$

Если $\varphi(t) > \operatorname{dist}(it, \partial R)$ для достаточно больших t, то, как легко видеть, $U \cap R$ ограничено. Следовательно, найдется последовательность точек $z_n \in R \cap \partial U$, $|z_n| \to \infty$ (не умаляя общности, можно считать, что $\operatorname{Re} z_n \to \infty$) таких, что

$$\varphi(t_n) = |it_n - z_n|.$$

Пусть D_n – круг с центром в $t_n i$ радиуса $\varphi(t_n)$, γ_n – дуга окружности ∂D_n длиной $\operatorname{Im} z_n/2$ с центром в точке z_n.

Применяя простую оценку гармонической меры в области

$$V \cap \left\{ z \in \mathbf{C}_+ : |z - z_n| < \operatorname{Im} z_n/2 \right\}$$

и используя малость h_4 на ∂V, получаем, что при некотором $c > 0$, не зависящем от n,

$$\log |h_4(z)| < -p^*(c \operatorname{Im} z), \ z \in \gamma_n.$$

Поскольку

$$t_n/\sqrt{2} + \text{const} < |it_n - z_n| < \operatorname{Re} z_n \leqslant (\operatorname{Im} z_n)^{1+\gamma},$$

получаем, что

$$\log |h_4(z)| = \int_{\partial D_n} \log |h_4(w)| \, \omega(z, dw, D_n) \leqslant$$

$$\leqslant -p^*(ct_n^{1-\gamma}/2)\, \omega(z, \gamma_n, D_n), \ z \in D_n.$$

При $z \in \frac{1}{2} D_n$

$$\omega(z, \gamma_n, D_n) \geqslant \text{const} \cdot \frac{\operatorname{Im} z_n}{\varphi(t_n)} \geqslant \text{const} \cdot t_n^{-\gamma}.$$

Поэтому

$$\log |h_4(z)| \leqslant -\text{const} \cdot t_n^{(1-\gamma)(1+\epsilon)} t_n^{-\gamma} < -\text{const} \cdot |z|^{1+\epsilon/4}, z \in \frac{1}{2} D_n. \quad (4.4)$$

Заметим теперь, что если положить $p_0(x) = x^{1+\epsilon/5}$ и определить по этому весу p_0 пространства Q_0 и J_0, как описано в § 3, то $h_4 \in Q_0$. Из условия (4.4) легко вывести, что h_4 удовлетворяет условиям леммы 3.7. Отсюда следует, что $h_4 \in J_0$, $h \in J_0$, $d(h) \equiv 0$. Однако, по условию, $d(h) \not\equiv 0$. (Ясно, что значения $d(h)$ не зависят от веса).

Полученное противоречие доказывает ограниченность множества $U \cap R$.

4.6. Пусть φ – конформное отображение $\mathbf{C}_+$ на V такое, что

$$\varphi(i) = z_* + i, \ \varphi(\infty) = \infty$$

(см. (4.3)).

Далее мы будем оценивать искажения, возникающие при этом отображении. Пусть

$$S(x) \overset{\text{def}}{=} \left\{z \in \partial V : \operatorname{Re} z > x\right\},\ S_1(x) \overset{\text{def}}{=} \left\{z \in \partial R : \operatorname{Re} z > x\right\},$$

$$R(x) \overset{\text{def}}{=} \left\{z \in \mathbf{C}_+ : \operatorname{Re} z < x\right\} \cup R.$$

Оценим гармоническую меру

$$\omega(z_* + i, S(x), V).$$

Во-первых, ясно, что при $x_1 > x_0$, где $x_0 = x + x_0^{1/(1+\gamma)}$, а x достаточно велико,

$$\omega(x_1 + ix_1^{1/(1+\gamma)}, S(x), V) > \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$\omega(z_* + i, S(x), V) = \int_{\partial R} \omega(z, S(x), V)\, \omega(z_* + i, dz, R) \geqslant$$

$$\geqslant \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{2}\, \omega(z_* + i, dz, R) = \frac{1}{2} \omega(z_* + i, S_1(x_0), R) \geqslant \text{const} \cdot x_0^{-1}.$$

(Последнее неравенство следует, например, из теоремы Келлога (см. [20])). Итак,

$$\omega(z_* + i, S(x), V) \geqslant \text{const} \cdot x^{-1}, x > 1.$$

Во-вторых, по принципу расширения области,

$$\omega(z_* + i, S(x), V) \leqslant \omega(z_* + i, \partial(R(x)), R(x)) \leqslant$$

$$\leqslant 2\omega(z_* + i, [x, \infty), \mathbf{C}_+) \leqslant \text{const} \cdot x^{-1}, x > 1.$$

Возвращаясь к отображению φ и учитывая конформную инвариантность гармонической меры, получаем

$$\omega(z_* + i, S(\operatorname{Re} \varphi(x)), V) = \omega(0, [x, \infty), \mathbf{C}_+),$$

$$c_1 (\operatorname{Re} \varphi(x))^{-1} \leqslant x^{-1} \leqslant c_2 (\operatorname{Re} \varphi(x))^{-1}, x > 1, \operatorname{Re} \varphi(x) > 1.$$

Рассуждая аналогично для $x < 0$, получаем в итоге

$$0 < c_1 \leqslant \left|\frac{\varphi(x)}{x}\right| \leqslant c_2 < \infty,\ |x| > 1$$

(здесь используется то, что $\operatorname{Im} \varphi(x) = o(|\operatorname{Re} \varphi(x)|), |x| \to \infty$).

Отметим, что более точную оценку можно вывести, например, из одного результата Н. А. Широкова [21].

Пусть $\Phi(z) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\varphi(z)}{z+i}$. Тогда $\Phi \in A(\mathbf{C}_+)$, $|\arg \Phi(z)| < \pi$, поэтому $\Phi \in H^p$ при всех $p < {}^1/_2$ (см., например, [19], с. 119).

Далее, $c_3 \leqslant |\Phi(x)| \leqslant c_4$, $x \in \mathbf{R}$, следовательно

$$c_3 \leqslant |\Phi(z)| \leqslant c_4, z \in \mathbf{C}_+,$$

$$c_3 |z| \leqslant |\varphi(z)| \leqslant c_4 |z|, \ |z| > 1. \tag{4.5}$$

Отметим, что если бы удалось доказать, что функции f_4, g_4 ограничены на каком-либо множестве $\varphi(\{z \in \mathbf{C}_+ : \operatorname{Im} z < \delta\})$, то можно было бы сразу использовать теорему 2 из работы И. В. Островского [5]. Однако удается получить лишь более слабые утверждения (4.8).

4.7. Установим следующие оценки искажения вблизи границы:

(а) $\operatorname{dist}(\varphi(x+i|x|^{-2}), \partial V) < \mathrm{const}$, $|x| > 1$, $x \in \mathbf{R}$.

(б) Найдутся $\delta > 0$, $N_0 < \infty$ такие, что для любого $N > N_0$ среди чисел $x = \delta, \ldots, N\delta$ по крайней мере половина удовлетворяет условию

$$\sup_{|z-x-\delta i| < \delta} \operatorname{dist}(\varphi(z), \partial V) < 1.$$

Доказательство. (а) Поскольку

$$\omega(\varphi(x+i|x|^{-2}), \varphi([x, x+|x|^{-2}]), V) =$$
$$= \omega(x+i|x|^{-2}, [x, x+|x|^{-2}], \mathbf{C}_+) \geqslant \mathrm{const}, \ |x| > 1,$$

достаточно проверить, что

$$\operatorname{diam}(\varphi([x, x+|x|^{-2}])) < 1, \ x > x_0.$$

Эта оценка следует в свою очередь из того, что

$$\omega(i, [x, x+|x|^{-2}], \mathbf{C}_+) < \mathrm{const}|x|^{-4}$$

и того, что

$$\omega(z_* + i, \partial V \cap \{z \in \mathbf{C}_+ : \zeta < \operatorname{Re} z < \zeta_1\}, V) > \mathrm{const} \left|\frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta}\right|^2 \tag{4.6}$$

при $|\zeta| > 1$, $|\zeta - \zeta_1| < 1$.

Для доказательства (4.6) можно воспользоваться принципом расширения области, а затем оценить гармоническую меру в модельной области W:

$$\omega(i, [t, t+t_1(1+i)], W) \geqslant \mathrm{const} \cdot t^{-2} t_1^2, \ t > 1, \ 0 < t_1 < 1,$$

где

$$W = \{z \in \mathbf{C}_+ : |\operatorname{Im} z| > |\operatorname{Re} z| \vee |\operatorname{Im} z| > |\operatorname{Re}(z-t)|\}.$$

(б) Из (4.5) следует, что для достаточно малого δ по крайней мере две трети чисел x из набора $\delta/2, \ldots, (2N-1)\delta/2$ удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re}\varphi(x+\delta) - \operatorname{Re}\varphi(x) < 1.$$

Поскольку все отрезки, составляющие ∂V, имеют длину не менее 1, получаем, что при достаточно малом δ по крайней мере половина чисел x удовлетворяет условию:

множество $S, S \overset{\text{def}}{=} \varphi([x, x+\delta])$, является отрезком. Тогда

$$\omega(\varphi(z), S, V) = \omega(z, [x, x+\delta], \mathbf{C}_+) \geqslant \frac{9}{10},$$

если $|z-x-\frac{\delta}{2}-\delta i| < \delta$, при достаточно малом δ.

Отсюда вытекает искомая оценка

$$\sup_{|z-x-\delta i|<\delta} \operatorname{dist}(\varphi(z), \partial, V) < 1.$$

4.8. Пересадим теперь функции f_4, g_4, h_4 в $\mathbf{C}_+$.

Пусть

$$f_5(z) \overset{\text{def}}{=} f_4(\varphi(z)), g_5(z) \overset{\text{def}}{=} g_4(\varphi(z)), h_5(z) \overset{\text{def}}{=} h_4(\varphi(z)).$$

Из (4.5) вытекает, что

$$\begin{aligned} |f_5(z)| &< \exp p^*(c_4|z|), \\ |g_5(z)| &< \exp p^*(c_4|z|). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Далее, $|h_5(z)| < \text{const}$.

Обратимся сначала к доказательству теоремы 3.3.

Из результатов п. 4.7 и элементарных оценок типа теоремы о двух константах вытекает, что

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sup_{0<\operatorname{Im} z<(1+|\operatorname{Re} z|)^{-2}} (|f_5(z)|+|g_5(z)|)\,|f_5(z)g_5(z)| < \text{const}, \\ \text{и для некоторого } c>0 \text{ выполнено условие} \\ \displaystyle\forall N>N_0,\ \operatorname{card}\Big\{n,\ 1\leqslant n\leqslant N: \\ \displaystyle\sup_{|z-n\delta-\delta i|<\delta} (|f_5(z)|+|g_5(z)|)\,|f_5(z)g_5(z)| < c\Big\} > \frac{N}{2}. \end{array}\right\} \tag{4.8}$$

4.9. Здесь мы воспользуемся следующей модификацией одного результата И. В. Островского [4, 5].

Лемма 4.1. *Пусть функции* $g_1, g_2 \in A(\mathbf{C}_+) \cap C(\overline{\mathbf{C}}_+)$ *удовлетворяют условиям:*

(а) $g_1 \cdot g_2 \in H^\infty(\mathbf{C}_+)$,

(б) *для любого* $c>0$ *найдется* c_1 *такое, что*

$$|g_1(z)| + |g_2(z)| < c_1 \exp\exp c|z|,\ z\in\mathbf{C}_+,$$

$$\text{(в)}\ \sup\Big\{|g_1(z)| + |g_2(z)|,\ 0<\operatorname{Im} z<(1+|\operatorname{Re} z|)^{-2}\Big\} < \infty,$$

$$\text{(г)}\ \forall N>N_0,\ \operatorname{card}\Big\{n,\ 1\leqslant n\leqslant N: \sup_{|z-n\delta-\delta i|<\delta} |g_1(z)| < 1\Big\} > \frac{N}{2}.$$

Тогда найдется число $b \in \mathbf{R}$ *такое, что*

$$g_1(z)\exp ibz \in H^\infty(\mathbf{C}_+).$$

Доказательство леммы аналогично доказательству теоремы 2 из работы [4], однако для замкнутости изложения приводится в Приложении в конце статьи.

Положим теперь

$$g_1 \overset{\text{def}}{=} f_5^2 g_5 \quad \text{и} \quad g_2 \overset{\text{def}}{=} f_5 g_5^2.$$

Условие (а) вытекает из ограниченности функции h_5. Условие (б) есть следствие оценки (4.7), условия теоремы на p и леммы 3.2 (б). Условия (в) и (г) – следствия оценок (4.8).

Применим к функциям g_1 и g_2 лемму 4.1.

4.10. Итак, $(f_5^2 g_5)(z)\exp ibz \in H^\infty(\mathbf{C}_+)$.

Поскольку $f_5(z)g_5(z) \in H^\infty(\mathbf{C}_+)$, по теореме Линделёфа для некоторого $c<\infty$

$$|f_5(z)\exp ibz| < c\exp c|z|.$$

Обращаясь теперь к доказательству теоремы 3.4, сразу имеем, что $g_5 \in H^\infty(\mathbf{C}_+)$. Снова по теореме Линделёфа для некоторого $c<\infty$

$$|f_5(z)| < c\exp c|z|.$$

Завершение доказательства является общим для обеих теорем.

4.11. Для некоторого $c<\infty$

$$|f_5(z)| < c\exp c|z|.$$

Используя оценку (4.5), получаем, что

$$|f_4(z)| = |f_5(\varphi^{-1}(z))| < c\exp\frac{c}{c_3}|z|.$$

Вспоминая, что $f_4 \in L^\infty(\mathbf{R})$, получаем, что функция $a_{f_4}(z)\exp ic'z$ ограничена на $\mathbf{R}\cup i\mathbf{R}_+$. По принципу Фрагмена–Линделёфа

$$a_{f_4}(z)\exp ic'z \in H^\infty(\mathbf{C}_+),$$

$$f_4(z)\exp ic'z \in L^\infty(\mathbf{C}_+).$$

Поскольку $\lim\limits_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in\mathbf{C}_+}} \left(\dfrac{f+j_f}{f_4}\right)(z) = 1$, $j_f \in J$ (см. п. 4.4), $f_4(z)\exp ic'z \in L^\infty(\mathbf{C}_+)$.

Тем самым теоремы 3.3 и 3.4 доказаны.

Приложение

Доказательство леммы 4.1

Будем следовать ходу доказательства и обозначениям [4].

Функция $g_1 \cdot g_2$ ограничена в $\mathbf{C}_+$, поэтому ее нули удовлетворяют условию Бляшке.

Обозначим через B произведение Бляшке по нулям g_1.

Из условия (в), ограниченности функции $g_1 \cdot g_2$ и того, что

$$|\log|g_1(z)|| \leqslant \log^+|g_1(z)| + \log^+|g_2(z)| + \log^+|1/(g_1g_2)(z)|,$$

получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log|g_1(t)||}{1+t^2} dt < \infty. \tag{П1}$$

Введем следующую функцию ψ:

$$\psi(z) = \exp\left\{\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \log|g_1(t)| \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2}\right) dt\right\}.$$

Сходимость интеграла следует из (4.8); функция ψ лежит в $H^\infty(\mathbf{C}_+)$ вследствие ограниченности g_1 на $\mathbf{R}$.

Определим, наконец,

$$G \overset{\text{def}}{=} i \log \frac{g_1}{B\psi}.$$

Функция $\operatorname{Im} G$ гармонична в $\mathbf{C}_+$, непрерывна в $\overline{\mathbf{C}}_+$, равна нулю на $\mathbf{R}$. Из принципа симметрии следует, что G аналитически продолжается до целой функции. Обозначим ее также через G.

Докажем, что для любого $c > 0$ найдется c_1 такое, что

$$|G(z)| \leqslant c_1 \exp c|z|. \tag{П2}$$

Используем при этом следующее утверждение из работы [22].

Если $Q \in H^\infty(\mathbf{C}_+) \setminus \{0\}$, то найдутся $\delta > 0$ и числа ρ_k, σ_k такие, что

$$|Q(z)| \geqslant \exp(-\delta|z|), \; z \in \mathbf{C}_+ \setminus E,$$

где

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{z : \rho_k < |z| < \sigma_k\right\}, \quad \sum_{k \geqslant 1} \log \frac{\sigma_k}{\rho_k} < \infty.$$

Применяя это утверждение к функциям B, ψ и $g_1 \cdot g_2$, заключаем, что для некоторого $\delta > 0$ и для некоторой последовательности s_k

$$2^k < s_k < 2^{k+1}, \; k > k_0, \tag{П3}$$

выполняется неравенство

$$\min(|B(z)|, |\psi(z)|, |(g_1g_2)(z)|) \geqslant \exp(-\delta|z|), \; |z| = s_k, \operatorname{Im} z \geqslant 0.$$

Тогда

$$\operatorname{Im} G(z) \leqslant \log^+|g_1(z)| + \log^+|1/B(z)| + \log|1/\psi(z)| \leqslant c_1 \exp c|z|,$$

$$-\operatorname{Im} G(z) \leqslant \log^+|\psi(z)| + \log^+|g_2(z)| + \log^+|B(z)| + \log|1/(g_1g_2)(z)| \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \exp c|z|, \; |z| = s_k, \; \operatorname{Im} z \geqslant 0.$$

Следовательно, $|\operatorname{Im} G(z)| \leqslant c_1 \exp c|z|$, $|z| = s_k$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Наконец, эта оценка распространяется по принципу симметрии и на целые окружности $s_k\mathbf{T}$. Используя формулу Шварца и условие (П3), получаем (П2).

Докажем теперь, что

$$I \overset{\text{def}}{=} \iint_{|\operatorname{Im} z| \leqslant (1+|\operatorname{Re} z|)^{-2}} \frac{|\operatorname{Im} G(z)|}{1+|\operatorname{Re} z|^2} dm_2(z) < \infty. \tag{П4}$$

Используя условие (в), получаем, что при $0 < \operatorname{Im} z < (1+|\operatorname{Re} z|)^{-2}$

$$|\operatorname{Im} G(z)| \leqslant \log^+ |1/B(z)| + \log^+ |1/\psi(z)| + \log^+ |1/(g_1 g_2)(z)| + O(1).$$

Остается лишь указать, что для $Q \in H^\infty(\mathbf{C}_+) \setminus \{0\}$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}+is} \frac{\log^+ |1/Q(z)|}{1+|\operatorname{Re} z|^2} dz \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}+is} \frac{\log^+ |Q(z)|}{1+|\operatorname{Re} z|^2} dz - \log |Q(i(s+1))|.$$

(Не умаляя общности, $Q(z) \neq 0$, $z \in [si, (s+1)i]$).

Вследствие гармоничности функции $\operatorname{Im} G(z)$ имеем для z таких, что $|\operatorname{Im} z| < \frac{1}{3}(1+|\operatorname{Re} z|)^{-2}$ оценку

$$|\operatorname{Im} G(z)| \leqslant \frac{1}{\pi\left(\frac{1}{3}(1+|\operatorname{Re} z|)^{-2}\right)^2} \iint_{|w-z| \leqslant \frac{1}{3}(1+|\operatorname{Re} z|)^{-2}} |\operatorname{Im} G(w)| dm_2(w) \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \cdot |z|^6 \cdot I.$$

Снова по формуле Шварца

$$|G'(x)| = O(|x|^6),$$

$$|G(x)| = O(|x|^7), \quad |x| \to \infty, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Отсюда и из условия (П2) в силу принципа Фрагмента–Линделёфа следует, что функция G есть полином.

Поскольку $\operatorname{Im} G(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$, коэффициенты этого полинома вещественны.

Воспользуемся теперь условием (г). Пусть $\{n_k\}$ – последовательность чисел, для которых

$$\sup_{|z - n_k\delta - \delta i| < \delta} |g_1(z)| < \infty, \quad n_k \in \mathbf{N}.$$

Если

$$\deg G = n, \quad G(x) = a_n x^n + O(|x|^{n-1} + 1),$$

то

$$\operatorname{Im} G(x + \delta w) = n a_n \delta \operatorname{Im} w \cdot x^{n-1} + O(|x|^{n-2} + 1),$$

$$\iint_{|z - t\delta - \delta i| < \delta} \frac{|\operatorname{Im} G(z)|}{1+|\operatorname{Re} z|^2} dm_2(z) > \text{const}(t^{n-3} + t^{-2}). \tag{П5}$$

Поскольку

$$\sum_k \iint\limits_{\substack{|z-n_k\delta-\delta i|<\delta \\ \operatorname{Im} z>0}} \frac{|\operatorname{Im} G(z)|}{1+|\operatorname{Re} z|^2}\, dm_2(z) < \infty$$

(это доказывается,так же как и (П4)), из оценки (П5) и условия (г) плотности последовательности $\{n_k\}$ следует, что $\deg G \leqslant 1$.

Поскольку $g_1 = B\psi \exp iG$, искомое утверждение доказано.

Список литературы

[1] *Titchmarsh E. C.* The zeros of certain integral functions // Proc. London Math. Soc. (2). *1926.* Vol. 25. P. 283–302.

[2] *Domar Y.* A solution of the translation-invariant subspace problem for weighted L^p on **R**, **R**+ or **Z** // Radical Banach algebras and automatic contihuity. Lecture Notes in Math. *1983.* Vol. 975. P. 214–226.

[3] *Domar Y.* Extension of the Titchmarsh convolution theorem with applications in the theory of invariant subspaces // Proc. London Math. Soc. (3). *1983.* Vol. 46. P. 288–300.

[4] *Островский И. В.* Носитель свертки конечных мер и меры, однозначно определяемые сужением на полупрямую // ДАН УССР. Сер. А. *1984.* № 3. С. 8–12.

[5] *Островский И. В.* Generalization of the Titchmarsh convolution theorem and the complex-valued measures uniquely determined by their restrictions to a half-line // 8th Int. Semin. Uzhgorod. 1984. Lecture Notes in Math. *1985.* Vol. 1155. P. 256–283.

[6] *Боричев А. А.* Сверточные уравнения и почти аналитические функции. Препринт ЛОМИ, Е-5-88. Л., *1988.* 38 с.

[7] *Боричев А. А.* Titchmarsh-type convolution theorem on the group **Z** // Arkiv för math. *1990.* Vol. 29, N 1. P. 177–185.

[8] *Дынькин Е. М.* Функции с заданной оценкой $\partial f/\partial \bar z$ и теорема Левинсова // Мат. сб. *1972.* Т. 81. С. 182–190.

[9] *Боричев А. А.* Граничные теоремы единственности для почти аналитических функций и асимметричные алгебры последовательностей // Мат. сб. *1988.* Т. 136. С. 324–340.

[10] *Боричев А. А., Вольберг А. Л.* Теоремы единственности для почти аналитических функций // Алгебра и анализ. *1989.* Т. 1. С. 146–177.

[11] *Никольский Н. К.* Об инвариантных подпространствах взвешенных операторов сдвига // Мат. сб. *1967.* Т. 74. С. 171–190.

[12] *Якубович Д. В.* Инвариантные подпространства операторов взвешенного сдвига // Зап. науч. семинаров. ЛОМИ. *1985.* Т. 141. С. 100–143.

[13] *Allan G. R.* Ideals of rapidly growing function // Proc. Int. Symp. Funct. Anal. and Appl. Ibadan, Nigeria, *1977.*

[14] *Domar Y.* Cyclic elements under translation in weighted L^1 spaces on **R**+ // Arkiv för Math. *1981.* Vol. 19. P. 137–144.

[15] *Никольский Н. К.* Инвариантные подпространства в теории операторов и теории функций // Итоги науки и техники. Мат. анализ. Т. 12. М.: ВИНИТИ, *1974.* С. 199–412.

[16] *Domar Y.* Translation invariant subspaces of weighted L^p and l^p spaces // Math. Scand. *1981.* Vol. 49. P. 133–144.

[17] *Schwartz L.* Theorie des distributions. II. Paris: Hermann, *1951.*

[18] *Dickson D. G.* Factoring rapidly decreasing entire functions // Bul. Sci. Math. *1986.* Vol. 110. P. 335–345.

[19] *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, *1984.* 469 с.

[20] *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, *1966.* 628 с.

[21] *Широков Н. А.* Количественное уточнение теоремы Радо // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. *1987.* Т. 157. С. 103–112.

[22] *Hayman E. K.* Questions of regularity connected with the Phragmen–Lindelöf principle // J. Math. Pures at Appl. *1956.* Vol. 35. P. 115–126.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 15 февраля 1989 г.