Алгебра и анализ
Том 4 (1992), вып. 2

АНАЛИТИЧЕСКАЯ КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТЬ И АСИМПТОТИЧЕСКИ ГОЛОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ

А. А. Боричев

Техника асимптотически голоморфных функций применяется для изучения эффекта аналитической квазианалитичности в полуплоскости и в угле. Получены точные оценки убывания гладких аналитических функций вблизи нуля бесконечной кратности, расположенного на границе.

§ 1. Введение

Пусть $\{M_n\}_{n\geqslant 0}$ — неубывающая последовательность положительных чисел. Класс Карлемана $C\{M_n\}$ — это множество всех C^∞-гладких функций f на $\mathbb{R}$ таких, что для некоторого $c>0$ и всех $n\in\mathbb{Z}_+$

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant c^n M_n,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Классический результат Данжуа–Карлемана о квазианалитичности (Δ) [1] устанавливает критерий того, что любая функция из класса Карлемана $C\{M_n\}$, равная нулю в какой-то точке вместе со всеми своими производными, тождественно равна нулю. Этот критерий — расходимость интеграла

$$\int^\infty \frac{\log T(r)}{r^2}\,dr,$$

где

$$T(r)=\sup_{n\geqslant 0}\frac{r^n}{M_n}. \tag{1.1}$$

Соответственно, в неквазианалитическом случае,

$$\int^\infty \frac{\log T(r)}{r^2}\,dr<\infty, \tag{1.2}$$

существуют функции f, лежащие в $C\{M_n\}$, исчезающие в какой-то точке x вместе со всеми производными и не равные нулю тождественно.

Ключевые слова: аналитическая квазианалитичность, асимптотически голоморфные функции.

В 1972 г. Е. М. Дынькин [2] поставил задачу точной количественной оценки функции f в окрестности точки x.

Пусть

$$M(t) = \sup_{r>0} (\log T(r) - rt), \quad t > 0.$$

Тривиальные рассуждения (см., например, лемму 2.2) влекут для некоторого $c = c(f)$ в окрестности точки x оценку

$$|f(t)| \leqslant \exp(-M(c|t-x|)),$$

не являющуюся точной при $M(t) \gg \frac{1}{t}$.

Эта задача была решена в конце 80-х А. Л. Вольбергом. Ответ в ней следующий.

Пусть $\psi(t) = \log M(t), \quad M(t) > \log \dfrac{1}{t}$.

Известно (см.[3]), что условие (1.2) эквивалентно сходимости интегралов

$$\int_0 \psi(x)\,dx \quad \text{и} \quad -\int_0 x\psi'(x)\,dx.$$

Определим вспомогательную функцию $\theta(t)$ (для малых $t > 0$):

$$-\int_0^{\theta(t)} x\psi'(x)\,dx = t.$$

Если $f \in C\{M_n\}$ и для всех $n \in \mathbb{Z}_+$ $f^{(n)}(0) = 0$, то для некоторого $c > 0$ и малых $t > 0$

$$|f(t)| \leqslant \exp(-M(\theta(ct)) - M(ct)).$$

Точность этой оценки проверяется с помощью конструкции, построенной еще в 1970 г. в [4].

Способ решения этой и сходных задач о гладких функциях основан на использовании предложенной Е. М. Дынькиным (см. также неопубликованную работу [5]) техники так называемого почти аналитического или (более поздний термин, как нам кажется, лучше отражающий суть дела) асимптотически голоморфного продолжения.

Оказывается [6, 7], что с точностью до некоторых условий регулярности классы Карлемана $C\{M_n\}$ допускают следующее описание:

Функция f, определенная на прямой, лежит в $C\{M_n\}$ тогда и только тогда, когда f может быть C^1-гладко продолжена во всю плоскость так, что $f \in L^\infty(\mathbb{C})$ и для некоторого $c > 0$

$$|\bar\partial f(z)| \leqslant \exp(-M(c|\operatorname{Im} z|)), \quad z \in \mathbb{C}.$$

(Легко видеть, что

$$\exp(-M(t)) = \inf_{r>0}\Big(e^{rt}\inf_{n\geqslant 0}\frac{M^n}{r^n}\Big) = \inf_{n\geqslant 0}\Big(M_n\inf_{r>0}\frac{e^{rt}}{r^n}\Big) \asymp \inf_{n\geqslant 0}\frac{M_n t^n}{n!}\sqrt{n}. \tag{1.3}$$

В [7] речь идет фактически об оценке с использованием вместо функции $\exp(-M)$ функции h,

$$h(t) = \inf_{n\geqslant 0}\frac{M_n t^{n-1}}{n!};$$

при этом

$$th(t) \leqslant \exp(-M(t)) \leqslant 2th(2t).)$$

Вопрос об условиях на гладкость функций, аналитических в полуплоскости, обеспечивающих квазианалитичность (Δ) на границе (так называемый эффект аналитической квазианалитичности) был поставлен и решен Б. Салинасом [8] и, независимо, Б. И. Коренблюмом [9].

Искомым критерием для класса $C_A\{M_n\}$

$$C_A\{M_n\} = \{f\in C_A^\infty(\mathbb{C}_-) : \exists c<\infty, \quad |f^{(n)}(z)|\leqslant c^n M_n, \quad n\in\mathbb{Z}_+, \quad z\in\overline{\mathbb{C}}_-\},$$

является расходимость интеграла

$$\int^{\infty}\frac{\log T(r)}{r^{3/2}}\,dr. \tag{1.4}$$

Решение сходно с доказательством Карлемана критерия квазианалитичности (Δ).

С самого начала теория квазианалитичности была тесно связана с вопросами весовой полноты полиномов. Как известно (см.[10]), полиномы плотны в $L^2(\mathbb{R}, p\,dx)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log p(t)}{1+t^2}\,dt = -\infty,$$

если вес p четен и функция $1/p$ логарифмически выпукла.

В случае сильно несимметричного (на $\pm\infty$) регулярного веса критерий полноты полиномов получен А. Л. Вольбергом [11]. Он состоит в квазианалитичности на одной и аналитической квазианалитичности на другой полуоси,

$$\int^{\infty}\frac{\log p(t)}{t^2}\,dt = -\infty, \qquad \int_{-\infty}\frac{\log p(t)}{t^{3/2}}\,dt = -\infty.$$

Легко видеть, что это утверждение эквивалентно результату о квазианалитичности (Δ) класса функций $C\{M_n\}\{\widetilde{M}_n\}$ на прямой, являющихся суммами аналитических в верхней полуплоскости и квазианалитически гладких вплоть до границы функций и аналитических в нижней полуплоскости, аналитически квазианалитически гладких функций,

$$C\{M_n\}\{\widetilde{M}_n\} = \{f+g, \quad f \in C_A\{M_n\}, \quad g(\overline{z}) \in C_A\{\widetilde{M}_n\}\},$$

где

$$\int^{\infty} \frac{\log T(r)}{r^{3/2}}\,dr = \infty, \qquad \int^{\infty} \frac{\log \widetilde{T}(r)}{r^2}\,dr = \infty,$$

T и $\widetilde{T}$ определяются по $\{M_n\}_{n\geqslant 0}$ и $\{\widetilde{M}_n\}_{n\geqslant 0}$ как в (1.1). Это утверждение содержит теорему Салинаса–Коренблюма. Доказательство, предложенное А. Л. Вольбергом, довольно сложно.

В настоящей заметке излагаются новые доказательства результатов Салинаса–Коренблюма и Вольберга об аналитической квазианалитичности в полуплоскости и в угле, использующие технику асимптотически голоморфных функций. При условии сходимости интеграла (1.4) и расходимости интеграла

$$\int^{\infty} \frac{\widetilde{T}(r)}{r^2}\,dr$$

решается задача об оценке функций из $C_A\{M_n\}$, $C\{M_n\}\{\widetilde{M}_n\}$, исчезающих в какой-то точке вместе со всеми производными.

Формулировки результатов приведены в § 2, доказательства — в § 3.

Автор признателен А. Л. Вольбергу, В. П. Гурарию и Е. М. Дынькину за содержательные обсуждения.

§ 2. Утверждения об аналитической квазианалитичности

Пусть $w, \widetilde{w}$ — непрерывные неубывающие функции, $w(0) = \widetilde{w}(0) = 0$. Будем рассматривать классы асимптотически голоморфных функций

$$\begin{aligned} D^c_A(w) &= \{f \in C^1(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C}) \cap A(\mathbb{C}_+) \,:\, &&|\bar\partial f(z)| \leqslant w(c|\operatorname{Im} z|), && z \in \mathbb{C}_-\},\\ D^c(w,\widetilde{w}) &= \{f \in C^1(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C}) : &&|\bar\partial f(z)| \leqslant w(c|\operatorname{Im} z|), && z \in \mathbb{C}_-,\\ & &&|\bar\partial f(z)| \leqslant \widetilde{w}(c\operatorname{Im} z), && z \in \mathbb{C}_+\}. \end{aligned}$$

Воспользуемся следующим утверждением, связывающем классы $C_A\{M_n\}$ и $C\{M_n\}\{\widetilde{M}_n\}$ соответственно с $D^c_A(w)$ и $D^c(w,\widetilde{w})$, вытекающим из результатов статьи [7].

Предположим, что возрастающая последовательность положительных чисел $\{M_n\}_{n\geqslant 0}$ регулярна: последовательность $M_n/(nM_{n-1})$ возрастает,

$$\sup_{n\geqslant 1}(M_{n+1}/M_n)^{1/n} < \infty, \qquad \sup_{n\geqslant 1}(M_n/n!)^{1/n} = \infty,$$

и аналогичным условиям удовлетворяет последовательность $\{\widetilde{M}_n\}_{n\geqslant 0}$. Об условиях регулярности см. также [12].

Предложение 2.1.

$$C_A\{M_n\} = \bigcup_{c>0} D^c_A(w)|\mathbb{R},$$

$$C_A\{M_n\}\{\widetilde{M}_n\} = \bigcup_{c>0} D^c(w,\widetilde{w})|\mathbb{R},$$

где $w = \exp(-M)$, $\widetilde{w} = \exp(-\widetilde{M})$, *функции* M *и* $\widetilde{M}$ *связаны с последовательностями* $\{M_n\}_{n\geqslant 0}$ *и* $\{\widetilde{M}_n\}_{n\geqslant 0}$ *как в* (1.3).

Условия на мажоранты w и $\widetilde{w}$ переписываются в терминах последовательностей $\{M_n\}_{n\geqslant 0}$ и $\{\widetilde{M}_n\}_{n\geqslant 0}$. Таким образом, в дальнейщем мы ограничимся установлением результатов об аналитической квазианалитичности классов $D^c_A(w)$, $D^c(w,\widetilde{w})$.

Если

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log w(x)}{\log(x)} = \infty, \tag{2.1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log \widetilde{w}(x)}{\log x} = \infty,$$

то

$$D^c_A(w)|\,\overline{\mathbb{C}}_+ \subset C^\infty(\overline{\mathbb{C}}_+),$$

$$D^c(w,\widetilde{w})|\,\mathbb{R} \subset C^\infty(\mathbb{R}).$$

Действительно, любая функция f из $D^1_A(w)$ представима в виде суммы двух вспомогательных функций — f_1,

$$f_1(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{\overline{\partial} f(\zeta)}{z-\zeta}\,dm_2(\zeta), \tag{2.2}$$

и $f - f_1$. Первая из них бесконечно дифференцируема в точке 0, поскольку для любого n

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{\overline{\partial} f(\zeta)}{z-\zeta}\,dm_2(\zeta) = -\sum_{k=1}^{n} z^{k-1}\iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{\overline{\partial} f(\zeta)}{\zeta^k}\,dm_2(\zeta) + z^n\iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{\overline{\partial} f(\zeta)}{\zeta^n(z-\zeta)}\,dm_2(\zeta), \tag{2.3}$$

и интегралы в правых частях сходятся абсолютно, вторая — аналитична в круге $\mathbb{D}$. Рассматривая сдвиги функции f, получаем, что $f \in C^\infty(\overline{\mathbb{C}}_+)$. (Легко видеть, что условие (2.1) является также и необходимым для того, чтобы выполнялось включение $D^1_A(w) \subset C^\infty(\overline{\mathbb{C}}_+)$).

Будем говорить, что класс $D^c_A(w)$ аналитически квазианалитичен, если мажоранта w удовлетворяет условию (2.1) и любая функция из $D^c_A(w)$, равная нулю вместе со всеми своими производными вдоль $\mathbb{R}$ в точке 0, тождественно равна нулю в $\overline{\mathbb{C}}_+$.

Лемма 2.2. *Если мажоранта w удовлетворяет условию (2.1),*

$$\text{функции} \quad \frac{\log w(x)}{\log x} \quad \text{и} \quad \frac{xw'(x)}{w(x)} \ \text{убывают в окрестности точки } 0, \tag{2.4}$$

то любая функция f из $D^1_A(w)$, равная нулю вместе со всеми своими производными вдоль $\mathbb{R}$ в точке 0, удовлетворяет оценке

$$|f(x)| \leqslant c\,w(|x|)/x^2$$

в окрестности точки 0 для некоторого $c < \infty$.

Доказательство содержится в § 3.

Поскольку для любой ненулевой функции f, аналитической и ограниченной в верхней полуплоскости, сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |f(x)|}{1+x^2}\,dx \tag{2.5}$$

(см. [13]), лемма 2.2 влечет немедленно, что класс $D^c_A(w)$ аналитически квазианалитичен в том случае, когда

$$\int_0 \log w(x)\,dx = -\infty, \tag{2.6}$$

и мажоранта w удовлетворяет условиям (2.1) и (2.4).

Определим функцию φ следующим образом:

$$\varphi(t) = \left(\frac{t}{\log \dfrac{1}{w(1/t)}} \right)^{1/2}.$$

Условие (2.6) выражается через функцию φ следующим образом:

$$\int^{\infty} \frac{dt}{(\varphi(\exp t))^2} = \infty.$$

Однако условие (2.6) не является точным (по порядку роста) для того, чтобы класс $D^c_A(w)$ был аналитически квазианалитическим.

Если $\liminf\limits_{t\to\infty} \varphi(t) < \infty$ и выполнены условия (2.1) и (2.4), то из леммы 2.2 вытекает, что

$$\liminf_{t\to 0} \int_0^t \log|f(x)|\,dx < 0,$$

а следовательно, $f \equiv 0$. Поэтому в регулярном случае, представляющем для нас интерес, функция φ возрастает, неограничена и для любого $\varepsilon > 0$

$$\varphi(2t) \leqslant (1+\varepsilon)\varphi(t).$$

Теорема 2.3. *Пусть мажоранта w удовлетворяет условиям (2.1) и (2.4), функция φ возрастает, неограничена и*

$$\left.\begin{array}{c}\varphi(2t) \leqslant (1+\varepsilon)\varphi(t)\\ \text{при достаточно больших } t \text{ для некоторой абсолютной константы } \varepsilon > 0.\end{array}\right\} \qquad (2.7)$$

Если

$$\int^{\infty} \frac{dt}{\varphi(\exp t)} = \infty, \qquad (2.8)$$

то класс $D^c_A(w)$ аналитически квазианалитичен.

Доказательство представляет собой вариацию на тему так называемой "леммы о распространении оценки" (см. [14, 15]) и приведено в § 3.

Аналогично можно доказать следующее утверждение:

Теорема 2.4. *Для $0 < \rho < 2\pi$ пусть*

$$\Gamma_\rho = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \rho\},$$
$$D^{1,\rho}_A(w) = \{f \in C^1(\mathbb{C}) : f \text{ аналитична в } \Gamma_\rho,\ |\bar\partial f(z)| \leqslant w(\operatorname{dist}(z, \Gamma_\rho))\}.$$

Если мажоранта w удовлетворяет условиям (2.1) и (2.4), функция φ, определенная равенством

$$\varphi(t) = t^{\pi(\pi+\rho)} \Big/ \left(\log \frac{1}{w(1/t)}\right)^{\rho/(\pi+\rho)}, \qquad (2.9)$$

возрастает и удовлетворяет условию (2.7),

$$\int^{\infty} \frac{dt}{\varphi(\exp t)} = \infty,$$

то класс $D^{1,\rho}_A(w)$ аналитически квазианалитичен в точке 0, т.е. выполняется импликация

$$f \in D^{1,\rho}_A(w)|\Gamma_\rho, \quad f^{(n)}(0) = 0\ \forall n \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0.$$

Из теоремы 2.3 можно вывести следующее следствие, доказанное ранее в [11].

Следствие 2.5. *Если мажоранта w удовлетворяет условиям теоремы 2.3, мажоранта $\widetilde{w}$ удовлетворяет условиям:*

$$\text{функция} \quad x \log \frac{1}{\widetilde{w}(x)} \quad \text{убывает в окрестности точки } 0,$$
$$\int_0 \log\log \frac{1}{\widetilde{w}(x)}\, dx = \infty,$$

то класс $D^1(w,\widetilde{w})$ квазианалитичен (Δ) на $\mathbb{R}$, т.е.

$$f \in D^1(w,\widetilde{w})|\mathbb{R}, \quad f^{(n)}(0) = 0 \ \forall n \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0.$$

Доказательство состоит в применении техники мультипликативной факторизации асимптотически голоморфных функций (см. [14], [15], теорема 6.3).

Для любой $f \in D^1(w,\widetilde{w})$ существуют непрерывная в $\mathbb{D}$ функция g такая, что $g|(\mathbb{C}_- \cap \mathbb{D}) = 0$, и функция h аналитичная в $\mathbb{C}_- \cap \mathbb{D}$ и C^∞-гладкая в $\overline{\mathbb{C}}_- \cap \mathbb{D}$, такие что функция $F = (f+g)\exp(-h)$ аналитична в $\mathbb{C}_+ \cap \mathbb{D}$. Остается заметить, что $F \in D^1_A(w)$,

$$(f|\mathbb{R})^{(n)}(0) = 0 \ \forall n \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad (F|\mathbb{R})^{(n)}(0) = 0. \ \forall n \geqslant 0$$

Тем самым вопрос сводится к использованию теоремы 2.3. •

Метод, используемый в доказательстве теоремы 2.3, позволяет получить в случае отсутствия аналитической квазианалитичности точные оценки сверху величины функции из класса $D^c_A(w)$ вблизи нуля бесконечной кратности. Сформулируем этот результат сразу для случая угла.

Теорема 2.6. *Если мажоранта w удовлетворяет условиям* (2.1) *и* (2.4),

$$\left.\begin{array}{l}\text{функция } \varphi, \text{ определенная в (2.9), возрастает и } \varphi(t^2) \leqslant c\varphi(t) \\ \text{при достаточно больших } t \text{ для некоторого } c < \infty,\end{array}\right\} \tag{2.10}$$

$f \in D^{1,\rho}_A(w)|\Gamma_\rho$ и для всех $n \geqslant 0$ $f^{(n)}(0) = 0$, то для некоторого $c_1 > 0$ для малых положительных x.

$$\log|f(x)| \leqslant -\frac{c_1}{x\varphi(1/x)}\left(\int\limits_0^x \frac{dt}{t\varphi(1/t)}\right)^{\pi/\rho} =$$

$$= -c_1\left(\frac{1}{x}\log\frac{1}{w(x)}\right)^{\rho/(\pi+\rho)}\left(\int\limits_0^x \left(\frac{1}{t}\log\frac{1}{w(t)}\right)^{\rho/(\pi+\rho)} dt\right)^{\pi/\rho}.$$

Доказательство приведено в § 3. Конечно, в случае расходимости интегралов

$$\int\limits_0 \frac{dt}{t\varphi(1/t)}, \qquad \int\limits_0 \left(\frac{1}{t}\log\frac{1}{w(t)}\right)^{\rho/(\pi+\rho)} dt$$

эта теорема содержит теорему 2.3.

Любопытно сравнить этот результат в случае $\rho = \pi$ с известными утверждениями о множествах малости, делении и слабой обратимости в алгебрах аналитических функций в круге, ограниченных мажорантой $1/w(1-|z|)$ (см.[16]).

Наконец, аналогичная оценка выполняется в случае двусторонней асимметричной гладкости.

Теорема 2.7. *Если мажоранта w удовлетворяет условиям теоремы* 2.6 $(\rho = \pi)$, *и мажоранта $\widetilde{w}$ удовлетворяет условиям следствия* 2.5, *то любая функция f, $f \in D^1(w, \widetilde{w})$, такая, что для всех $n \geqslant 0$ $f^{(n)}(0) = 0$, удовлетворяет оценке*

$$\log|f(\pm x)| \leqslant -\frac{c}{x\varphi(1/x)} \int\limits_0^x \frac{dt}{t\varphi(1/t)}$$

при малых x для некоторого $c > 0$.

Доказательство состоит в повторении доказательства следствия 2.5 и использовании результата теоремы 2.6.

Точность результатов теорем 2.3, 2.6 и 2.7 проверяется следующим образом.

Теорема 2.8. *В условиях теоремы* 2.6, *если*

$$\int^{\infty} \frac{dt}{\varphi(\exp t)} < \infty, \tag{2.11}$$

то существует функция $f \in D_A^{1,\rho}(w)|\Gamma_\rho$ такая, что $f^{(n)}(0) = 0$ $\forall n$ и для некоторого $c < \infty$ при малых x

$$\log|f(x)| \geqslant -\frac{c}{x\varphi(1/x)} \left(\int\limits_0^x \frac{dt}{t\varphi(1/t)} \right)^{\pi/\rho}.$$

Доказательство, использующее конструкцию, сходную с содержащейся в [4], приведено в § 3.

§ 3. Доказательство утверждений

Доказательство леммы 2.2. Поскольку для любого $n \geqslant 0$ $f^{(n)}(0) = 0$, из (2.2) и (2.3) следует, что

$$(f - f_1)^{(n)}(0) = \frac{n!}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{\overline{\partial} f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, dm_2(\zeta).$$

Поэтому для любого $n \geqslant 0$

$$|f(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \left| \frac{(f - f_1)^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| + \left| \frac{x^n}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{\overline{\partial} f(\zeta)}{\zeta^n (x - \zeta)}\, dm_2(\zeta) \right|, \quad x \in \mathbb{R},\ |x| < 1.$$

Поскольку функция $f - f_1$ ограничена и аналитична в $\mathbb{D}$, для некоторого $c < \infty$

$$\left| \frac{(f - f_1)^{(k)}(0)}{k!} \right| \leqslant c.$$

Далее для некоторого $c < \infty$

$$\Big|\iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{\bar\partial f(\zeta)}{\zeta^{n+1}(x-\zeta)}\, dm_2(\zeta)\Big| \leqslant c\int\limits_0^1 \frac{w(t)}{t^{n+1}}\, dt.$$

Следовательно, для некоторого c_1 и для всех n

$$|f(\pm x)| \leqslant c_1 x^n\Big(1+\int\limits_0^1 \frac{w(t)}{t^{n+1}}\, dt\Big), \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < x < \frac{1}{2}.$$

Пусть число n определяется неравенствами

$$n+1 < \frac{xw'(x)}{w(x)} \leqslant n+2. \tag{3.1}$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 \frac{w(t)}{t^{n+1}}\, dt = \int\limits_0^x \frac{w(t)}{t^{n+1}}\, dt + \int\limits_x^1 \frac{w(t)}{t^{n+1}}\, dt \leqslant x\frac{w(x)}{x^{n+1}} + \frac{w(x)}{x^{n+2}},$$

поскольку функция $w(t)t^{-n-1}$ возрастает при $t \leqslant x$, а функция $w(t)t^{-n-2}$ убывает при $t \geqslant x$ вследствие (2.4).

Следовательно, для некоторого $c_2 < \infty$

$$|f(\pm x)| \leqslant c_2\Big(x^n + \frac{w(x)}{x^2}\Big).$$

Для достаточно малых x вследствие (2.4)

$$\frac{w'(x)}{w(x)}\log x < \frac{\log w(x)}{x},$$

по (3.1)

$$\log w(x) > \log x \cdot \frac{xw'(x)}{w(x)} \geqslant (n+2)\log x.$$

Тем самым

$$|f(x)| \leqslant 2c_2 w(|x|)|x|^{-2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < |x| < 1. \quad \bullet$$

Доказательство теоремы 2.3. Предположим, что

$$f \in D^1_A(w), \quad \text{и} \quad (f|\mathbb{R})^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \geqslant 0.$$

По лемме 2.2, не умаляя общности можно считать, что

$$|f(x)| \leqslant w(|x|)\,|x|^{-2}, \quad 0 < |x| < 1.$$

Пусть x — достаточно малое число,

$$I_0 = -\frac{1}{2}\int_0^x \log\frac{w(t)}{t^2}\,dt,$$

последовательности $\{t_k\}$ и $\{I_k\}$ определяются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &t_k \text{ — такое число из отрезка } (0,1], \text{ что}\\ &\log w(2^{k-1}xt_k) = -\frac{t_k I_{k-1}}{2^{k-1}x}, \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

$$I_k = I_{k-1} - c_0 2^{k-1}x\log w(2^{k-1}xt_k) - \frac{1}{2}\int_{2^{k-1}x}^{2^k x} \log\frac{w(t)}{t^2}\,dt, \tag{3.3}$$

для натуральных k таких, что $I_{k-1} \leqslant 1$, $2^k x \leqslant x_0$, а числа x_0 и c_0 выбираются ниже.

Существование чисел t_k, удовлетворяющих условиям (3.2), эквивалентно разрешимости уравнений

$$t_k\varphi\Big(\frac{1}{2^{k-1}xt_k}\Big) = \frac{1}{\sqrt{I_{k-1}}}.$$

Поскольку

$$\lim_{t\to 0} t\varphi\Big(\frac{1}{2^{k-1}xt}\Big) = \frac{1}{2^{k-1}x}\lim_{t\to 0}\sqrt{\frac{t}{\log(1/w(t))}} = 0,$$

для существования искомых t_k достаточно, чтобы

$$\varphi\Big(\frac{1}{2^{k-1}x}\Big) \geqslant \frac{1}{\sqrt{I_{k-1}}}. \tag{3.4}$$

Выполнение неравенств (3.4) следует из определения чисел I_k и условия (2.7):

$$I_k \geqslant -\frac{1}{2}\int_0^{2^k x}\log\frac{w(t)}{t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^{2^k x}\log\frac{1}{t^2}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{2^k x}\frac{dt}{t\varphi^2(1/t)} \geqslant \frac{1}{\varphi^2(1/(2^k x))},$$

если ε и x_0 достаточно малы.

Вследствие (3.2),

$$t_k = \frac{1}{\sqrt{I_{k-1}}\varphi(1/(2^{k-1}xt_k))}. \tag{3.5}$$

Проверим по индукции, что

$$\int_0^{2^n x}\log|f(t)|\,dt \leqslant -I_n.$$

Действительно, если индукционное предположение выполнено при $n = k$, то из простой оценки интеграла Пуассона следует, что для некоторого c_1, $0 < c_1 \leqslant 1$, не зависящего от k,

$$\log|f(z)| \leqslant c_1 \frac{2^k x t_{k+1}}{(2^k x)^2} \int\limits_0^{2^k x} \log|f(t)|\, dt \leqslant c_1 \log w(2^k x t_{k+1}), \tag{3.6}$$

для z таких, что $\operatorname{Im} z = 2^k t x_{k+1}$, $\operatorname{Re} z \in [2^k x, 2^{k+1} x]$.

Рассмотрим прямоугольник Ω,

$$\Omega = \{z : -2^k x t_{k+1} < \operatorname{Im} z < 2^k x t_{k+1}, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 3 \cdot 2^k x\},$$

и вспомогательную функцию g,

$$g(z) = f(z) - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega} \frac{\bar\partial f(\zeta)}{z - \zeta}\, dm_2(\zeta),$$

аналитическую и ограниченную константой, не зависящей от k в Ω.

Из (3.6) и того, что $|\bar\partial f(z)| \leqslant w(|\operatorname{Im} z|)$ следует, что при некотором $c > 0$

$$|g(z)| < w^c(\operatorname{Im} z)$$

для z, лежащих на средней трети T верхнего основания прямоугольника Ω. Условие (3.4) влечет неравенство $t_{k+1} \leqslant 1$, поэтому высота прямоугольника Ω не больше его ширины, и гармоническая мера T относительно Ω в точках средней трети отрезка $\Omega \cap \mathbb{R}$ оценивается снизу абсолютной константой, большей нуля. По теореме о двух константах [13]

$$|f(t)| \leqslant w^{c_1}(2^k t x_{k+1}), \quad 2^k x < t < 2^{k+1} x, \tag{3.7}$$

для некоторого $c_1 > 0$, не зависящего от k,

$$\int\limits_{2^k x}^{2^{k+1} x} \log|f(t)|\, dt \leqslant c_1 2^k x \log w(2^k t x_{k+1}),$$

$$\int\limits_0^{2^{k+1} x} \log|f(t)|\, dt \leqslant -I_k + c_1 \cdot 2^k x \log w(2^k t x_{k+1}).$$

Выбирая число c_0 в определении I_k равным $c_1/2$, и учитывая вытекающую из леммы 2.2 оценку

$$\int\limits_0^{2^{k+1} x} \log|f(t)|\, dt \leqslant -I_k + \int\limits_{2^k x}^{2^{k+1} x} \log \frac{w(t)}{t^2}\, dt,$$

получаем

$$\int_0^{2^{k+1}x} \log|f(t)|\,dt \leqslant -I_{k+1}. \tag{3.8}$$

Индукционный переход проверен. База следует из определения I_0.

Пусть $\phi(x) \overset{\text{def}}{=} x\varphi(1/x) = \sqrt{\dfrac{x}{\log(1/w(x))}}$. Это — монотонно возрастающая функция. Если $I_k \leqslant 1$ при $0 \leqslant k < n$, то вследствие (3.2) и (3.3),

$$I_{k+1} \geqslant I_k(1 + c_0 t_{k+1}), \quad 0 \leqslant k < n,$$

откуда, учитывая (3.5), получаем

$$\log I_{k+1} \geqslant \log I_k + \frac{c}{\sqrt{I_k}\varphi(1/(2^k x t_{k+1}))},$$

$$2^k x t_{k+1} = \phi^{-1}\Big(\frac{2^k x}{\sqrt{I_k}}\Big), \quad 0 \leqslant k < n.$$

Поэтому

$$\frac{c}{\varphi\Big(\dfrac{1}{\phi^{-1}(2^k x/\sqrt{I_k})}\Big)} \leqslant \sqrt{I_k}\,(\log I_{k+1} - \log I_k),$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{c}{\varphi\Big(\dfrac{1}{\phi^{-1}(2^k x/\sqrt{I_k})}\Big)} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{I_k}(\log I_{k+1} - \log I_k) \leqslant$$

$$\int_{-\log I_n}^{-\log I_0} e^{-t/2}\,dt \leqslant \int_{-\log I_n}^{\infty} e^{-t/2}\,dt \leqslant 2\sqrt{I_n}.$$

В то же время

$$\frac{1}{\varphi\Big(\dfrac{1}{\phi^{-1}(2^k x/\sqrt{I_k})}\Big)} \geqslant \frac{1}{\varphi\Big(\dfrac{1}{\phi^{-1}(2^k x)}\Big)},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{c}{\varphi\Big(\dfrac{1}{\phi^{-1}(2^k x)}\Big)} \geqslant \frac{c}{2}\int_x^{2^n x} \frac{dt}{t\varphi\Big(\dfrac{1}{\phi^{-1}(t)}\Big)}.$$

Поэтому снова по свойству (2.7)

$$\sqrt{I_n} \geqslant \frac{c}{4}\Big[\int_{\phi^{-1}(x)}^{\phi^{-1}(2^n x)} \frac{dt}{t\varphi(1/t)} - \frac{1}{\varphi(1/t)}\Big|_{\phi^{-1}(x)}^{\phi^{-1}(2^n x)}\Big] \geqslant c_1 \int_{\phi^{-1}(x)}^{\phi^{-1}(2^n x)} \frac{dt}{t\varphi(1/t)} \tag{3.9}$$

для некоторого $c_1 > 0$.

По (2.8)

$$\int_0 \frac{dt}{t\varphi(1/t)} = \infty,$$

по определению ϕ

$$\lim_{t\to 0} \phi(t) = 0,$$

поэтому для любого $x_0 > 0$ можно найти такие $x > 0$ и n, что $2^n x < x_0$

$$c_1 \int_{\phi^{-1}(x)}^{\phi^{-1}(2^n x)} \frac{dt}{t\varphi(1/t)} > 1,$$

и построить последовательности чисел t_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, I_k, $0 \leqslant k \leqslant m$, $m \leqslant n$, такие, что выполнены условия (3.2) и (3.3), $I_{k-1} \leqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant m$, $I_m > 1$.

Вследствие (3.8), это означает, что интеграл (2.5) расходится, т.е. $f|\overline{\mathbb{C}}_+ \equiv 0$. •

Доказательство теоремы 2.6. Для простоты ограничимся случаем $\rho = \pi$. Воспользуемся конструкцией, построенной при доказательстве теоремы 2.3.

По (2.10) и (3.5) $t_k > 2^{k-1}x$, так как

$$2^{k-1}x\varphi\Big(\frac{1}{(2^{k-1}x)^2}\Big) < 1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{I_{k-1}}}$$

для достаточно малых $2^{k-1}x$, $2^{k-1}x \leqslant x_0$. Поэтому

$$t_k \geqslant \frac{c}{\sqrt{I_{k-1}}\varphi(1/(2^{k-1}x))}.$$

Рассуждая как при выводе неравенства (3.9), получаем, что

$$\sqrt{I_n} \geqslant c_1 \int_x^{2^n x} \frac{dt}{t\varphi(1/t)}.$$

Оценивая $|f|$ как в (3.7), получаем, что

$$\log|f(t)| \leqslant -\frac{c}{t\varphi(1/t)} \int_0^t \frac{dx}{x\varphi(1/x)}$$

при достаточно малых $t > 0$ для некоторого $c > 0$. •

Доказательство теоремы 2.8. Для простоты также ограничимся случаем $\rho = \pi$. Отметим, что не умаляя общности можно считать, что функция φ дифференцируема,

$$\text{функция } \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} \text{ ограничена для больших } x. \tag{3.10}$$

Действительно, пусть $m(x) = \log \varphi(\exp x)$,

$$m_1(x) = \min_{0\leqslant y\leqslant x} (m(y) + x - y).$$

Тогда $m_1 \in \mathrm{Lip}\, 1$. Пусть далее,

$$m_2(x) = \int_x^{x+1} m_1(t)\,dt.$$

Тогда $m_2 \in C^1$, $0 \leqslant m_2' \leqslant 1$. Наконец, построим функцию φ_2, $\varphi_2(x) = \exp m_2(\log x)$, соответствующую ей мажоранту w_2, и заметим, что условие (3.10) выполнено для φ_2 и

$$\bigcup_{c<\infty} D_A^c(w) = \bigcup_{c<\infty} D_A^c(w_2).$$

Рассмотрим область Ω,

$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C}: \quad \mathrm{Im}\, z \geqslant -\min\left\{1, \frac{c_0|z|}{\varphi(1/|z|)\int_0^{|z|}\frac{dt}{t\varphi(1/t)}}\right\}\right\},$$

где константа c_0 будет выбрана ниже. Пусть χ — конформное отображение Ω на $\mathbb{C}_+$, оставляющее на месте точку 0 (продолженное до отображения $\overline{\Omega}$ на $\overline{\mathbb{C}}_+$). Представим χ в окрестности нуля в виде композиции отображений

$$\chi(z) = \frac{i}{\exp \chi_0(\log \frac{i}{z})},$$

где $\log$ — главная ветвь логарифма, а χ_0 — конформное отображение бесконечной полосы

$$\left\{z: \ \mathrm{Re}\, z > c, \ |\mathrm{Im}\, z| < \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{c_0}{\varphi(\exp|\mathrm{Re}\, z|)\int_{\exp|\mathrm{Re}\, z|}^{\infty}\frac{dt}{t\varphi(t)}}\right)\right\}$$

на полосу

$$\{z: \ \mathrm{Re}\, z > c, \ |\mathrm{Im}\, z| < \frac{\pi}{2}\},$$

оставляющее на месте точку ∞.

Теорема Варшавского [17] позволяет оценить асимптотику конформного отображения χ_0 на бесконечности, а следовательно, и χ в нуле. Необходимо лишь проверить выполнение условий

$$\lim_{x\to\infty} s'(x) = 0, \qquad \int^{\infty} \frac{(s'(x))^2}{s(x)}\,dx < \infty, \tag{3.11}$$

где

$$s(x) = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{c_0}{\varphi(\exp x)\int\limits_{\exp x}^{\infty}\frac{dt}{t\varphi(t)}}\right).$$

Пусть функция h определяется равенством

$$h(x) = \frac{1}{\varphi(x)\int\limits_{x}^{\infty}\frac{dt}{t\varphi(t)}}.$$

Отметим, что по свойству (2.10)

$$\int\limits_{x}^{\infty}\frac{dt}{t\varphi(t)} > \int\limits_{x}^{x^2}\frac{dt}{t\varphi(t)} > c\frac{\log x}{\varphi(x)}, \tag{3.12}$$

по свойству (3.10)

$$|h'(x)| < \frac{\varphi'(x)}{c\varphi(x)\log x} + \frac{1}{c^2 x\log^2 x} \leqslant \frac{c_2}{x\log x},$$

и

$$|s'(x)| \leqslant c_2 \exp x |h'(\exp x)|.$$

для некоторого $c_2 < \infty$. Отсюда вытекает выполнение условий (3.11).

Из теоремы Варшавского мы получаем, что для $z \in \partial\Omega$, $|z| < 1$,

$$\begin{aligned} |\chi(z)| &\leqslant c\exp\left[-\pi\int^{\log\frac{1}{|z|}}\frac{dx}{\pi + 2\arcsin\left(\frac{c_0}{\varphi(\exp x)\int\limits_{\exp x}^{\infty}\frac{dt}{t\varphi(t)}}\right)}\right] \\ &\leqslant c|z|\exp\left[-c_0c_1\int^{\log\frac{1}{|z|}}\frac{dx}{\varphi(\exp x)\int\limits_{\exp x}^{\infty}\frac{dt}{t\varphi(t)}}\right] \\ &= c|z|\exp\left(c_0c_1\int\limits_{|z|}\frac{dx}{x\varphi(1/x)\int\limits_{0}^{x}\frac{dt}{t\varphi(1/t)}}\right), \end{aligned} \tag{3.13}$$

где c_1 — абсолютная константа.

Пусть

$$N(x) = \int_0^x \frac{dt}{t\varphi(1/t)}.$$

Тогда при $c_0 = 1/c_1$

$$\exp\left(c_0 c_1 \int_s \frac{dx}{x\varphi(1/x)\int_0^x \frac{dt}{t\varphi(1/t)}}\right) = \exp\int_s \frac{N'(x)}{N(x)}\,dx = \frac{c}{N(s)}. \tag{3.14}$$

Проверим, что существует ненулевая функция g из $H^\infty(\Omega)$, модуль граничных значений которой удовлетворяет условию

$$\log|g(z)| = -P(|z|) = -\frac{1}{|z|\varphi(1/|z|)}\int_0^{|z|}\frac{dt}{t\varphi(1/t)}, \quad z \in \partial\Omega, \quad |\mathrm{Re}\, z| < 1. \tag{3.15}$$

Соответствующий критерий — это сходимость интеграла

$$\int_0 P(|\chi^{-1}(s)|)\,ds.$$

По (3.13) и (3.14)

$$s \leqslant c\frac{|\chi^{-1}(s)|}{N(|\chi^{-1}(s)|)}.$$

Свойства (2.10) и (3.12) влекут, что

$$sN(s) \leqslant c|\chi^{-1}(s)|$$

для некоторого $c < \infty$. Наконец, по (3.10) функция P монотонно убывает в окрестности нуля. Поэтому

$$\int_0 P(|\chi^{-1}(s)|)\,ds \leqslant \int_0 P\Big(\frac{sN(s)}{c}\Big)\,ds =$$
$$c\int_0 \frac{1}{sN(s)\varphi\big(\frac{c}{sN(s)}\big)}N\Big(\frac{sN(s)}{c}\Big)\,ds \leqslant c_1\int_0\frac{ds}{s\varphi(1/s)} < \infty$$

вследствие (2.11).

Далее, из (3.15) легко вывести, что

$$\log|g(x)| \leqslant -\frac{c}{|x|\varphi(1/|x|)}\int_0^{|x|}\frac{dt}{t\varphi(1/t)}$$

для $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$.

Достаточно применить теорему о двух константах к функции g в области $\{z : x/2 < \operatorname{Re} z < 2x, \quad z \in \Omega, \quad \overline{z} \in \Omega\}$.

Вследствие свойств φ и N для некоторого k (зависящего от c_0)

$$|g^k(z)| \leqslant cw(|\operatorname{Im} z|), \quad z \in \Omega, \quad z + i\operatorname{Im} z \notin \Omega, \quad |\operatorname{Re} z| < 1.$$

Осталось заметить, что слегка сгладив функцию $g_1 = g^k$, полагая

$$f(z) = \frac{4}{\pi |\operatorname{Im} z|^2} \int\limits_{\Omega \cap \{w: |w-z| < \frac{|\operatorname{Im} z|}{2}\}} g_1(z)\, dm_2(z),$$

мы получаем искомую функцию. •

Список литературы

[1] Мандельбройт С., *Квазианалитические классы функций*, ОНТИ, Л., М., 1937.

[2] Дынькин Е. М., *О росте аналитической функции вблизи множества ее особых точек*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **30** (1972), 158–160.

[3] Beurling A., *Analytic continuation across a linear boundary*, Acta Math. **128** (1972), 153–182.

[4] Гурарий В. П., *К теореме Н. Левинсона о нормальных семействах аналитических функций*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **19** (1970), 215–220.

[5] Мацаев В. И., *Некоторые теоремы полноты и компактности, связанные с классической квазианалитичностью*, Дис. на соиск. ... канд. физ.-мат. наук, Харьков, 1964.

[6] Дынькин Е. М., *Операторное исчисление, основанное на формуле Коши–Грина. и квазианалитичность классов* $D(h)$, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **19** (1970), 221–226.

[7] Дынькин Е. М., *Псевдоаналитическое продолжение гладких функций. Равномерная шкала*, Математическое программирование и смежные вопросы, Труды Седьмой Зимней Школы, Дрогобыч, 1974, ЛЭМИ АН СССР, М., 1976, с. 40–73.

[8] Salinas B., *Funciones con momentos nulos*, Rev. Acad. Ciencias Madrid **49** (1955), 331–368.

[9] Коренблюм Б. И., *Квазианалитические классы функций в круге*, ДАН СССР **164** (1965), 36–39.

[10] Carleson L., *On Bernstein's approximation problem*, Proc. Amer. Math. Soc. **2** no. 6 (1951), 953–961.

[11] Вольберг А. Л., *Весовая полнота полиномов на прямой для сильно несимметричного веса*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **126** (1983), 47–54.

[12] Мандельбройт С., *Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения*, ИИЛ, М., 1955.

[13] Koosis P., *The logarithmic integral*, Cambridge Univ. Press (1988), Cambridge.

[14] Боричев А. А., *Граничные теоремы единственности для почти аналитических функций и асимметричные алгебры последовательностей*, Мат. сб. **136**, вып. 3 (1988), 324–340.

[15] Боричев А. А., Вольберг А. Л., *Теоремы единственности для почти аналитических функций*, Алгебра и анализ **1**, вып. 1 (1989), 146–177.

[16] Никольский Н. К., *Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа*, Тр. МИАН **120** (1974).

[17] Warschawskii S. E., *On conformal mapping of infinite strips*, Trans. Amer. Math. Soc. **51** (1942), 280–335.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН
191011, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27

Поступило 20 ноября 1991 г.