Examples of uses of the term "indefinite integral"

Alexey Muranov

10th January 2025

Contents

1 Lagrange, Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

1.1 "Sur l'intégration d'une équation différentielle à différences finies, qui contient la théorie des suites récurrentes" (1759)

[...]

1.2 "Sur l'intégration de quelques équations différentielles dont les indéterminées sont séparées, mais dont chaque membre en particulier n'est point intégrable" (1766–1769)

[...]

2 Cauchy, Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

2.1 "Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal – Tome 1" (1823)

1823 original: [5].

In [5, 26.$^{\text{e}}$ Leçon, p. 103]:

> **2.$^{\text{e}}$ Problème.** *Trouver la valeur générale de y propre à vérifier l'équation*
>
> $$dy = f(x)dx. \tag{11}$$
>
> *Solution.* Si l'on désigne par $F(x)$ une valeur particulière de l'inconnue y, et par $F(X) + \omega(x)$ sa valeur générale, on tirera de la formule (11), à laquelle ces deux valeurs devront satisfaire, $F'(x) = f(x)$, $F'(x) + \omega'(x) = f(x)$, et par suite $\omega'(x) = 0$. D'ailleurs il résulte de la première des équations (5) qu'on satisfait à la formule (11) en prenant $y = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$. Donc la valeur générale de y sera
>
> $$y = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + \omega(x), \tag{12}$$

$\omega(x)$ désignant une fonction propre à vérifier l'équation (6). Cette valeur générale de y, qui comprend, comme cas particulier, l'intégrale (1), et qui conserve la mairie forme, quelle que soit l'origine x_0 de cette intégrale, est représentée dans le calcul par la simple notation $\int f(x)dx$, et reçoit le nom d'*intégrale indéfinie*. Cela posé, la formule (11) entraîne toujours la suivante

$$y = \int f(x)dx, \tag{13}$$

et réciproquement, en sorte qu'on a identiquement

$$d\int f(x)dx = f(x)dx. \tag{14}$$

2.2 "Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique – Suite du calcul infinitésimal" (1824)

1981 reprint: [4].

The original publication date is uncertain, but it is argued in [3, Introduction, pp. XVI–XIX] that the year must be 1824.

Published as "Équations différentielles ordinaires – Cours inédit – Fragment" (1981).

In [4, Première leçon, pp. 1–2]:

> *Intégrer* des équations différentielles, c'est trouver les fonctions qu'elles déterminent, ou du moins des équations nouvelles qui ne renferment que la variable et les fonctions dont il s'agit. Ces équations nouvelles se nomment *intégrales* ou *équations primitives*. L'intégrale d'une équation différentielle entre x, y et $\frac{dy}{dx}$, ne peut contenir que les deux quantités variables x et y.

In [4, Première leçon, pp. 2–3]:

> *Exemples.* $xdy + ydx$ étant la différentielle exacte du produit xy, il en résulte que l'équation
>
> $$xdy + ydx = 0 \tag{6}$$
>
> a pour l'intégrale
>
> $$xy = \mathcal{C} \quad \text{ou} \quad y = \frac{\mathcal{C}}{x}. \tag{7}$$
>
> $dy - f(x)dx$ étant la différentielle exacte de l'expression $y - \int_{x_0}^{x} f(x)dx$ dans laquelle x_0 désigne une valeur particulière de x, il en résulte que l'équation
>
> $$dy - f(x)dx = 0 \quad \text{ou} \quad dy = f(x)dx \tag{8}$$

a pour intégrale

$$(9) \qquad y - \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \mathcal{C} \quad \text{ou} \quad y = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + \mathcal{C} = \int f(x)dx.$$

$\phi(x)dx + \chi(y)dy$ étant la différentielle exacte de l'expression $\int_{x_0}^{x} \phi(x)dx + \int_{y_0}^{y} \chi(y)dy$, dans laquelle x_0, y_0 désignent des valeurs particulières de x et y, il en résulte que l'équation

$$(10) \qquad \phi(x)dx + \chi(y)dy = 0$$

a pour intégrale

$$(11) \qquad \int_{x_0}^{x} \phi(x)dx + \int_{y_0}^{y} \chi(y)dy = \mathcal{C}.$$

L'équation (8) a été déjà traitée dans le premier volume [page 103]. L'équation (10) est celle dans laquelle on dit que les variables sont *séparées.*

In [4, Première leçon, p. 4]:

Exemples. Comme il suffit de multiplier par $\frac{1}{xy}$ l'expression $xdy - ydx$, pour la transformer en une différentielle exacte, dans laquelle les variables soient séparées, il en résulte qu'à l'équation

$$(17) \qquad xdy - ydx = 0 \quad \text{ou} \quad xy\left\{\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x}\right\} = 0,$$

on peut substituer les deux suivantes :

$$(18) \qquad \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0, \qquad\qquad (19) \qquad xy = 0.$$

On satisfait à l'équation (18) en posant

$$(20) \qquad l(y) - l(x) = \textit{const.} \quad \text{ou} \quad y = \mathcal{C}x;$$

et à l'équation (19), en posant $y = 0$. Cette dernière valeur de y, se déduisant de l'équation (20), lorsqu'on y réduit à zéro la constante arbitraire $\mathcal{C}$, n'est qu'une intégrale particulière.

[...]

In [4, Seconde leçon, p. 10]:

[...] On en conclura

$$dz = \frac{f(x)}{y_1}dx, \qquad z = \mathcal{C} + \int_{x_0}^{x} \frac{f(x)}{y_1}dx,$$

et par suite

$$y = y_1 \left[\mathcal{C} + \int_{x_0}^{x} \frac{f(x)}{y_1} dx \right], \tag{12}$$

ou, ce qui revient au même,

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} F(x)dx} \left[\mathcal{C} + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x} F(x)dx} f(x)dx \right], \tag{13}$$

Telle est l'intégrale générale de l'équation (4). On peut y remplacer les intégrales définies par des intégrales indéfinies, et se dispenser par ce moyen d'écrire la constante arbitraire. On trouve alors

$$y = e^{-\int F(x)dx} \int e^{\int F(x)dx} f(x)dx. \tag{14}$$

3 Riemann, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866)

[...]

4 Jordan, Camille Jordan (1838–1922)

4.1 "Cours d'analyse de l'École Polytechnique – Tome II – Calcul intégral" (1913, 3rd edition)

1909 third edition: [8].

In [8, I.I, pp. 1–2]:

> 1. Soit $f(x)$ une function de la variable indépendante x, laquelle reste continue dans un certain intervalle AB si x est une variable réelle (ou synectique dans un certain domaine E si x est une variable complexe).
>
> Nous avons vu (t. I, n^os 82 et 202) qu'il existe dans cet intervalle (ou dans ce domaine) une infinité de fonctions admettant pour dérivée $f(x)$ ou, co qui revient au même, pour différentielle $f(x)\,dx$. Ces fonctions diffèrent les unes de autres d'une quantité constante, qui peut être choisie arbitrairement. Nous les avons appelées les *intégrales indéfinies* de $f(x)\,dx$ et nous sommes convenu de les représenter par la notation $\int f(x)\,dx$.
>
> L'objet du présent Chapitre est l'étude du problème suivant :
>
> *Une fonction $f(x)$ étant donnée, trouver ses intégrales.*

2. Nous avons déterminé dans le Calcul différentiel les dérivées d'un certain nombre de fonctions simples. Nous sommes par là en mesure d'écrire immédiatement les intégrales de celles-ci ; on aura, par exemple,

$$
\begin{aligned}
\int (x-a)^m dx &= \frac{(x-a)^{m+1}}{m+1} + \text{const.} \qquad \text{si} \qquad m \gtrless -1,\\
\int \frac{dx}{x-a} &= \log(x-a) + \text{const.},\\
\int \frac{dx}{1+x^2} &= \text{arc tang}\, x + \text{const.},\\
\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \text{arc sin}\, x + \text{const.},\\
\int e^{mx}\, dx &= \frac{e^{mx}}{m} + \text{const.},\\
\int \sin mx\, dx &= -\frac{\cos mx}{m} + \text{const.},\\
\int \cos mx\, dx &= \frac{\sin mx}{m} + \text{const.},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

5 Picard, Charles Émile Picard (1856–1941)

5.1 "Traité d'analyse – Tome I" (1891)

1891 original: [10].

In [10, II.I.1, p. 38]:

1. On donne souvent le nom d'*intégrale indéfinie* à une intégrale définie ayant pour limite supérieure la variable x et une limite inférieure qui est une constante qu'on ne fixe pas. On représente simplement par

$$\int f(x)\, dx$$

celte intégrale indéfinie, sans prendre la peine de marquer les limites. C'est simplement une manière de désigner une fonction ayant pour dérivée $f(x)$.

[...]

6 Goursat, Édouard Jean-Baptiste Goursat (1858–1936)

6.1 "Cours d'analyse mathématique – Tome I" (1933, 5th edition)

1933 5th edition: [6].

`Page 185:`

[...]

7 De la Vallée Poussin, Charles-Jean de la Vallée Poussin (1866–1962)

7.1 "Cours d'analyse infinitésimale – Tome I" [Course of infinitesimal analysis – Volume I] (1923, 5th Edition)

[...]

[...]

8 Menger, Karl Menger (1902–1985)

8.1 "Calculus – A modern approach" (1955, new edition)

1955 new edition: [9].

In [9, I.3, p. 14]:

[...]

In [9, VI.2, p. 136]:

[...]

9 Halmos, Paul Richard Halmos (1916–2006)

9.1 "Measure theory" (1950)

1974 republication: [7].

In [7, § 23, p. 97]:

> The **indefinite integral** of an integrable function f is the set function ν, defined for every measurable set E by $\nu(E) = \int_E f d\mu$.

In [7, § 30, p. 124]:

> § 30. ABSOLUTE CONTINUITY
>
> Motivated by the properties of indefinite integrals, we introduced the abstract concept of signed measure, and we showed that the abstraction had several of the important properties of the concrete concept which it generalized. Indefinite integrals have, however, certain additional properties (or, rather, certain relations to the measures in terms of which they are defined) that are not shared by general signed measures. In a special case we have already discussed one such property of very great significance (absolute continuity, § 23); we propose now to examine a more general framework in which the discussion of absolute continuity still makes sense.
>
> [...]

10 Bourbaki (1935–)

10.1 “Intégration 1–4” (1965)

2006 reprint of the 1965 original: [2].
[...]

10.2 “Fonctions d’une variable réelle” (1976)

2006 reprint of the 1976 original: [1].
In [1, Chapitre II, § 1, N° 4, p. II.8]:

> [...]

In [1, Chapitre III, Note historique, p. III.49]:

> [...]

In [1, Chapitre III, Note historique, p. III.59]:

> [...]

In [1, Chapitre III, Note historique, p. III.62]:

> [...]

References

[1] N. Bourbaki. *Fonctions d’une variable réelle. Théorie élémentaire*. French. Réimpression inchangée de l’édition originale de 1976. Berlin, Heidelberg: Springer, 18th Dec. 2006. x+314. DOI: 10.1007/978-3-540-34038-6. URL: https://link.springer.com/book/978-3-540-34038-6.

[2] N. Bourbaki. *Intégration. Chapitres 1 à 4*. French. Réimpression inchangée de l’édition originale de 1965. Berlin, Heidelberg: Springer, 18th Dec. 2006. iv+284. DOI: 10.1007/978-3-540-35329-4. URL: https://link.springer.com/book/978-3-540-35329-4.

[3] Augustin-Louis Cauchy. *Équations différentielles ordinaires. Cours inédit. Fragment.* French. With an intro. by Christian Gilain. With a forew. by Jean Dieudonné. Paris and New York: Études Vivantes and Johnson Reprint Corporation, 1981. lviii+146. URL: https://archive.org/details/EquationsDifferentiellesOrdinaires.

[4] Augustin-Louis Cauchy. ‘Résumé des leçons données a l’École Royale Polytechnique. Suite du calcul infinitésimal’. French. In: *Équations différentielles ordinaires. Cours inédit. Fragment.* With an intro. by Christian Gilain. With a forew. by Jean Dieudonné. Paris and New York: Études Vivantes and Johnson Reprint Corporation, 1981, pp. 1–146. URL: https://archive.org/details/EquationsDifferentiellesOrdinaires.

[5] Augustin-Louis Cauchy. *Résumé des leçons données a l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal. Tome premier*. French. Paris: Imprimerie Royale, Debure frères, 1823. xii+160. URL: `https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62404287`.

[6] Édouard Goursat. *Cours d'analyse mathématique*. Vol. 1: *Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développement en série. Applications géométriques*. French. 5th ed. Paris: Gauthier-Villars, 1933. 674 pp. URL: `https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k9454797`.

[7] Paul Richard Halmos. *Measure theory*. 1st ed. Graduate Texts in Mathematics 18. Originally published by Litton Educational Publishing, Inc., 1950. New York, NY: Springer, 1st Jan. 1974. xii+304. DOI: `10.1007/978-1-4684-9440-2`. URL: `https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4684-9440-2`.

[8] Camille Jordan. *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*. Vol. 2: *Calcul intégral*. French. 3rd ed. Paris: Gauthier-Villars, 1913. 705 pp.

[9] Karl Menger. *Calculus. A modern approach*. New edition. Boston: Ginn and Company, 1955. xviii+354.

[10] Émile Picard. *Traité d'analyse*. Vol. 1. Paris: Gauthier-Villars, 1891. xii+457. URL: `https://archive.org/details/traitedanalyse0000emil`.