Some historical examples of uses of the terms “variable” and “function”

Alexey Muranov

31st October 2024

Contents

1 Descartes, René Descartes (1596–1650)

1.1 “La géométrie” (1637)

`See "quantités indéterminées" and "quantités inconnues".`
`[...]`

2 Leibniz, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

2.1 “De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata easque omnes tangente” (1692)

1692 original: [28].
`[...]`

2.2 “Nova calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem ex data tangentium conditione” (1694)

1694 original: [29].
`[...]`

2.3 “Considerations sur la différence qu’il y a entre l’Analyse ordinaire et le nouveau calcul des transcendantes” (1694)

In [27, p. 405]:

> [...] Pour ce qui est de ceux qui ne se servent que de l’analyse ordinaire, & pensent peut-être qu’elle leur suffit, il sera bon de leur proposer des problèmes semblables au dernier de M. Bernoulli.
>
> En voici un plus général, qui le comprend avec une infinité d’autres. Soit donnée la raison, comme M à N, entre deux fonctions quelconques de la ligne ACC : Trouver la ligne. J’appelle *fonctions* toutes les portions des lignes droites qu’on fait en menant des droites indéfinies, qui répondent au point fixe, & aux points de la courbe, comme sont AB ou $A\beta$ abscisse, BC

ou βC ordonnée, AC corde, CT ou $C\theta$ tangente, CP ou $C\pi$ perpendiculaire, BT ou $\beta\theta$ soustangente, BP ou $\beta\pi$ sous-perpendiculaire, AT ou $A\theta$ *resecta*, ou retranchée par la tangente, AP ou $A\pi$ retranchée par la perpendiculaire, $T\theta$ & $P\pi$ sous-retranchées, *sub-resectae a tangente vel perpendiculari*, TP ou $\theta\pi$ *corresectae*. Et une infinité d'autres d'une construction plus composée, qu'on se peut figurer.

3 Bernoulli, Johann Bernoulli (1667–1748)

`[...]`

4 Euler, Leonhard Euler (1707–1783)

4.1 "Introductio in analysin infinitorum" [Introduction to analysis of the infinite] (1748)

1988 English translation of Volume 1: [17].

In [17, Chapter I, N.º 1–7, pp. 2–5]:

> 1. *A constant quantity is a determined quantity which always keeps the same value.*
>
> Quantities of this type are numbers of any sort which keep the same constant value, once they have been assigned; if it is required to represent constant quantities by a symbol, the initial letters of the alphabet are used a, b, c, etc. In algebra, where only fixed quantities are considered, these first letters of the alphabet usually denote known quantities, while the final letters represent unknown quantities, but in analysis this distinction is not so much used, since here it is more a question of considering the former as constants and the latter as variables.
>
> 2. *A variable quantity is one which is not determined or is universal, which can take on any value.*
>
> Since all determined values can be expressed as numbers, a variable quantity takes on all possible numbers (all numbers of all types). Just as from the ideas of individuals the ideas of species and genus are formed, so a variable quantity is a genus in which are contained all determined quantities. Variable quantities of this kind are usually represented by the final letters of the alphabet z, y, x, etc.
>
> 3. *A variable quantity is determined when some definite value is assigned to it.*
>
> Hence a variable quantity can be determined in infinitely many ways, since absolutely all numbers can be substituted for it. Nor is the symbol of the variable quantity exhausted until all definite numbers have been assigned to

it. Thus a variable quantity encompasses within itself absolutely all numbers, both positive and negative, integers and rationals, irrationals and transcendentals. Even zero and complex numbers are not excluded from the signification of a variable quantity.

4. *A function of a variable quantity is an analytic expression composed in any way whatsoever of the variable quantity and numbers or constant quantities.*

Hence every analytic expression, in which all component quantities except the variable z are constants, will be a function of that z; thus $a+3z$; $az-4z^2$; $az+b\sqrt{a^2-z^2}$; c^z; etc. are functions of z.

5. *Hence a function itself of a variable quantity will be a variable quantity.*

Since it is permitted to substitute all determined values for the variable quantity, the function takes on innumerable determined values; nor is any determined value excluded from those which the function can take, since the variable quantity includes complex values. Thus, although the function $\sqrt{9-z^2}$, with real numbers substituted for z, never attains a value greater than 3, nevertheless, by giving z complex values, for instance $5i$, there is no determined value which cannot be obtained from the formula $\sqrt{9-z^2}$. There do occur, however, some apparent functions which retain the same value no matter in what way the variable quantity is changed, for example z^0; 1^z; $\dfrac{a^2-az}{a-z}$ which assume the appearance of functions, but really are constant quantities.

6. *The principal distinction between functions, as to the method of combining the variable quantity and the constant quantities is here set down.*

Indeed, it depends on the operations by which the quantities can be arranged and mixed together. These operations are addition, subtraction, multiplication, division, raising to a power, and extraction of roots. Also the solution of equations have to be considered. Besides there operations, which are usually called algebraic, there are many others which are transcendental, such as exponentials, logarithms, and others which integral calculus supplies in abundance.

In the meantime certain kinds of functions can be noted, such as multiples $2z$, $3z$, $\frac{3}{5}z$, az, etc. and powers of z itself as z^2, z^3, $z^{\frac{1}{2}}$, z^{-1}, etc. which, as they arise from a single operation, so, expressions which come from any type of operation are distinguished by the name of function.

7. *Functions are divided into algebraic and transcendental. The former are those made up from only algebraic operations, the latter are those which involve transcendental operations.*

Thus multiples and powers of z are algebraic functions; also absolutely all expressions which are formed by the algebraic operations previously recalled, such as $\dfrac{a+bz^n-c\sqrt{2z-z^2}}{a^2z-3bz^3}$. Indeed frequently algebraic functions cannot be expressed explicitly. For example, consider the function Z of z defined by the equation, $Z^5 = az^2Z^3 - bz^4Z^2 + cz^3Z - 1$. Even if this equation cannot be solved, still it remains true that Z is equal to some expression composed of the variable z and constants, and for this reason Z shall be a function of z. Something else about transcendental functions should be noted, and this is the fact that the function will be transcendental only if the transcendental operation not only enters in, but actually affects the variable quantity. If the transcendental operations pertain only to the constants, the function is to be considered algebraic. For instance, if c denotes the circumference of a circle with radius equal to 1, c will be a transcendental quantity, nevertheless, these expressions: $c+z$, cz^2, $4z^c$, etc. are algebraic functions of z. The doubt raised by some as to whether such expressions as x^c are correctly classified as algebraic is of little importance. Indeed some people prefer to call powers of z, in which the exponents are irrational such as $z^{\sqrt{2}}$, intercendental functions rather than algebraic.

In [17, Chapter I, N.º 10–11, pp. 7–8]:

10. *Finally, we must make a distinction between single-valued and multiple-valued functions.*

A single-valued function is one for which, no matter what value is assigned to the variable z, a single value of the function is determined. On the other hand, a multiple-valued function is one such that, for some value substituted for the variable z, the function determines several values. Hence, all non-irrational functions, whether polynomial or rational, are single-valued functions, since expressions of this kind, whatever value be given to the variable z, produce a single-value. However, irrational functions are all multiple-valued, because the radical signs are ambiguous and give paired values. There are also among the transcendental functions, both single-valued and multiple-valued functions; indeed, there are infinite-valued functions. Among these are the arcsine of z, since there are infinitely many circular arcs with the same sine. We shall use letters P, Q, R, S, T, etc. for the individual single-valued functions of z.

11. *A two-valued function of z is one which gives a pair of values for each determined value of z.*

Functions of this kind display a square root, such as $\sqrt{2z+z^2}$. Whatever value is assigned to z, the expression $\sqrt{2z+z^2}$ has a twofold signification, either positive or negative. In general, Z will be a two-valued function of z if it is determined by a quadratic equation $Z^2 - PZ + Q = 0$, provided P and Q are single-valued functions of z. In this case, $Z = \dfrac{1}{2}P \pm \sqrt{(1/4)P^2 - Q}$, from which it is obvious that for each definite value of z, there correspond a pair of determined values of Z. However, it should be noted that the values of the function Z are both either real or both are complex. Further, as is clear from the nature of the equation, the sum of both values of Z is always equal to P and the product is equal to Q.

5 Le Rond d'Alembert, Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783)

5.1 "Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration" (1747)

[...]

6 Lagrange, Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

6.1 "Théorie des fonctions analytiques" (1797)

1797 original: [24].

In [24, N.º 1–2, pp. 1–2]:

> 1. On appelle *fonction* d'une ou de plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les qunatités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi dans les fonctions on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlée.
>
> 2. Pour marquer une fonction d'une seule variable comme x, nous ferons simplement précéder cette variable de la lettre ou caractéristique f, ou F ; mais lorsqu'on voudra désigner la fonction d'une quantité déjà composée de cette variable, comme x^2 ou $a+bx$ ou &c., on renfermera cette quantité entre deux parenthèses. Ainsi fx désignera une fonction de x, $f(x^2)$, $f(a+bx)$, &c. désigneront des fonctions de x^2, de $a+bx$, &c.
>
> Pour marquer une fonction de deux variables indépendantes x, y, nous écrirons $f(x, y)$, et ainsi des autres.
>
> Lorsque nous voudrons employer d'autres caractéristiques pour marquer les fonctions, nous aurons soin d'en avertir.
>
> Le mot *fonction* a été employé par les premiers analystes pour désigner en général les puissances d'une même quantité. Depuis on a étendu la signification de ce mot à toute quantité formée d'une manière quelconque d'une autre quantité. *Leibniz* et *Bernoulli* l'ont employé les premiers dans cette acceptation générale, et il est aujourd'hui généralement adopté.

In [24, N.º 17, pp. 14–15]:

> Nous appellerons la fonction fx, *fonction primitive,* par rapport aux fonctions $f'x$, $f''x$, &c. qui en dérivent, et nous appellerons celles-ci, *fonctions*

dérivées, par rapport à celle-là. Nous nommerons de plus la première fonction dérivée $f'x$, *fonction prime,* la seconde dérivée $f''x$, *fonction seconde,* la troisième fonction dérivée $f'''x$, *fonction tierce,* et ainsi de suite.

De la même manière, si y est supposé une fonction de x, nous dénoterons ses fonctions dérivées par y', y'', y''', &c. de sorte que y étant une fonction primitive, y' sera sa fonction *prime,* y'' en sera la fonction *seconde,* y''' la fonction *tierce,* et ainsi de suite.

In [24, N.º 31, p. 30]:

`[...]`

6.2 "Leçons sur le calcul des fonctions" (1806, 2nd edition)

1884 reprint: [23].

In [23, Leçon première, pp. 9–10]:

> Mais, à la naissance du Calcul différentiel, on n'avait pas encore une idée assez étendue de ce qu'on entend par fonction.
>
> Les premiers analystes n'avaient employé ce mot que pour désigner les différentes puissances d'une même quantité ; on en a ensuite étendu la signification à toute quantité formée d'une manière quelconque d'une autre quantité ; et il est aujourd'hui généralement adopté pour exprimer que la valeur d'une quantité dépend, suivant une loi donnée, d'une ou de plusieurs autres quantités données.
>
> Sous ce point de vue on doit regarder l'Algèbre comme la science des fonctions ; il est aisé de voir que la résolution des équations ne consiste, en général, qu'à trouver les valeurs des quantités inconnues en fonctions déterminées des quantités connues. Ces fonctions représentent alors les différentes opérations qu'il faut faire sur les quantités connues pour obtenir les valeurs de celles que l'on cherche, et elles ne sont proprement que le dernier résultat du calcul.
>
> Mais, en Algèbre, on ne considère les fonctions qu'autant qu'elles résultent des opérations de l'Arithmétique, généralisées et transportées aux lettres, au lieu que, dans le Calcul des fonctions proprement dit, on considère les fonctions qui résultent de l'opération algébrique du développement en série lorsqu'on attribue à une ou à plusieurs quantités de la fonction des accroissements indéterminés.

In [23, Leçon première, pp. 11–12]:

> Lorsqu'on envisage une fonction relativement à une des quantités qui la composent, on fait abstraction de la valeur de cette quantité, et l'on ne considère que la manière dont elle est combinée avec elle-même et avec les autres quantités. Ainsi la fonction est censée demeurer la même, tandis que cette quantité varie d'une manière quelconque, pourvu que les autres quantités

avec lesquelles elle est mêlée demeurent constantes ce qui introduit naturellement, par rapport aux fonctions, la distinction des quantités en variables et constantes.

Dans l'Algèbre ordinaire, on distingue simplement les quantités en connues et inconnues, et l'on a coutume de désigner les unes par les premières lettres de l'alphabet, et les autres par les dernières. L'application de l'Algèbre à la théorie des courbes a fait d'abord distinguer les quantités qui entrent dans l'équation d'une courbe en données, telles que les axes, les paramètres, etc., et en indéterminées, telles que les coordonnées. Depuis on a envisagé ces mêmes quantités sous l'aspect plus naturel de constantes et de variables et la considération des fonctions porte naturellement à regarder sous ce même point de vue les différentes quantités qui les composent.

Nous appellerons donc simplement fonctions d'une ou de plusieurs quantités toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entreront d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités regardées comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction sont censées pouvoir recevoir toutes les valeurs possibles.

Nous désignerons ordinairement les variables des fonctions par les dernières lettres de l'alphabet x, y, ..., et les constantes par les premières a, b, c, ... Et, pour marquer une fonction d'une variable, nous ferons simplement précéder cette variable de la lettre caractéristique f ou F. Ainsi $f(x)$ désignera une fonction de x ; $f(x^2)$, $f(a+bx)$, ... désigneront des fonctions de x^2, de $a+bx$, ...

Pour marquer une fonction de deux variables indépendantes comme x, y, nous écrirons $f(x, y)$, et ainsi des autres. Lorsque nous voudrons employer d'autres caractéristiques, nous aurons soin d'en avertir.

Si deux fonctions de deux variables différentes x, y, c'est-à-dire l'une de x et l'autre de y, sont composées de la même manière et avec les mêmes constantes, ces fonctions seront pareilles et pourront être désignées dans un même calcul par la même caractéristique ; ainsi $f(x)$ et $f(y)$ seront deux fonctions pareilles qui deviendront identiques en faisant $y = x$. Mais si, les deux fonctions étant composées de la même manière, les constantes qu'elles contiennent sont différentes, alors on ne pourra plus, généralement parlant, les représenter par la même caractéristique dans le cours d'un même calcul. Cependant, si les deux fonctions ne dînèrent, par exemple, que par la valeur d'une constante, qui serait a dans l'une et b dans l'autre, on pourra encore les désigner par la même caractéristique, en les représentant par $f(x, a)$ et $f(y, b)$, comme des fonctions pareilles de x, a et de y, b. Ainsi, dans ce cas, les quantités a et b entreront aussi dans l'expression de la fonction, parce que, quoique constantes dans chaque fonction, elles peuvent être regardées comme variables d'une fonction à l'autre.

In [23, Leçon sixième, pp. 50–51]:

Supposons ensuite que y soit une fonction de p et q, que nous désignerons par $f(p, q)$; il s'agira de substituer $x+i$ à la place de x dans les deux fonctions

p et q, et de trouver ensuite le coefficient de i dans le développement de la fonction composée $f(p,q)$. Or il est visible qu'on aura le même résultat, soit qu'on fasse ces deux substitutions à la fois, soit qu'on les fasse l'une après l'autre, puisque les quantités p et q sont regardées dans ces substitutions comme indépendantes.

En substituant d'abord $x+i$ à la place de x dans la fonction p, la fonction $f(p,q)$, regardée seulement comme fonction de p, deviendra, par ce que nous venons de trouver,

$$f(p,q) + ip'\,f'(p) + \ldots.$$

J'écris simplement $f'(p)$ pour désigner la fonction dérivée de $f(p,q)$ relativement à p seul, q étant regardée comme constante.

Substituons ensuite $x+i$ au lieu de x dans la fonction q, la fonction $f(p,q)$ deviendra pareillement

$$f(p,q) + iq'\,f'(q) + \ldots.$$

où $f'(q)$ représente la fonction prime de $f(p,q)$ prise relativement à q seul, p étant regardée comme constante.

Quant au terme $ip'\,f'(p)$, il est visible qu'étant déjà multiplié par i il se trouverait par cette nouvelle substitution augmenté de termes multipliés par i^2, i^3, $\ldots$.

Ainsi les deux premiers termes de la série provenant du développement de $f(p,q)$, après la substitution de $x+i$ pour x dans p et q, seront simplement

$$f(p,q) + ip'\,f'(p) + iq'\,f'(q)\,;$$

de sorte qu'on aura

$$y' = p'\,f'(p) + q'\,f'(q) = f'(p,q).$$

Si y était une fonction de p, q, r, représentée par $f(p,q,r)$, on trouverait de la même manière

$$y' = p'\,f'(p) + q'\,f'(q) + r'\,f'(r) = f'(p,q,r),$$

et ainsi de suite.

In [23, Leçon sixième, p. 55]:

On peut même, par cette notation, ne séparer du reste de la fonction dérivée que la partie relative à une variable donnée. Ainsi les fonctions primes de p et q, ou de p, q et r ou ..., peuvent se développer de cette manière,

$$f'(p,q) = p'\,f'(p) + q'\,f'(q),$$
$$f'(p,q,r) = p'\,f'(p) + f'(q,r) = p'\,f'(p) + q'\,f'(q) + r'\,f'(r),$$

et ainsi des autres.

Il faut toujours observer de ne renfermer, entre les parenthèses qui suivent la caractéristique f' des fonctions dérivées, que les variables par rapport auxquelles on veut prendre la fonction dérivée.

Lorsqu'il n'y a qu'une seule variable entre les parenthèses, comme $f'(p)$, cette expression indique que la fonction dérivée doit être prise relativement à cette variable, comme si elle était seule et unique ; c'est-à-dire que $f'(p)$ sera le coefficient de i dans le développement de la fonction donnée, en y substituant simplement $p + i$ au lieu de p, quelque fonction d'ailleurs que p puisse être de x.

In [23, Leçon neuvième, pp. 99–100]:

Donc, si l'on dénote simplement par $f, f', f'', \dots$ les valeurs de $f(i), f'(i), f''(i), \dots,$ lorsque $i = 0$, on aura en général

$$f(i) = f + if' + \frac{i^2}{2}f'' + \frac{i^3}{2.3}f''' + \dots;$$

et si l'on veut s'arrêter au terme $\mu^{\text{ième}}$, alors, comme le terme suivant serait

$$\frac{i^\mu}{2.3.4\dots\mu}f^\mu,$$

il n'y aura qu'à substituer à la place de f^μ la plus grande et la plus petite valeur de $f^\mu(i)$, ou des valeurs plus grandes ou plus petites que celles-ci, et l'on aura les limites du reste du développement.

In [23, Leçon douzième, p. 150]:

Si y est une fonction quelconque de x, et qu'on dénote par y^0, $y^{0\prime}$, $y^{0\prime\prime}$, $y^{0\prime\prime\prime}$, $\dots$, les valeurs de y et de ses fonctions dérivées y', y'', y''', $\dots$, qui répondent à $x = 0$ et qui sont par conséquent constantes, on aura, par ce que nous avons démontré à la fin de la Leçon IX,

$$y = y^0 + y^{0\prime}x + y^{0\prime\prime}\frac{x^2}{2} + y^{0\prime\prime\prime}\frac{x^3}{2.3} + \dots;$$

et, si l'on veut arrêter la série au terme n^{ieme}, alors on aura les limites du reste, en substituant dans le terme suivant

$$y^{0(n)}\frac{x^n}{1.2.3\dots n},$$

à la place de $y^{0(n)}$, la plus grande et la plus petite valeur de $y^{(n)}$ depuis $x = 0$ jusqu'à la grandeur qu'on veut attribuer à x.

In [23, Leçon quinzième, pp. 192–193]:

Si

$$F(x, y, a) = 0$$

est l'équation primitive d'une équation du premier ordre, celle-ci sera le résultat de l'élimination de la constante a, au moyen de son équation dérivée

$$F'(x, y) = 0,$$

relative à x et y ; et l'équation primitive singulière sera le résultat de l'élimination de la même quantité a, au moyen de l'équation dérivée

$$F'(a) = 0,$$

relative à a.

Supposons que l'on tire de l'équation

$$F'(x, y) = 0$$

la valeur de a en fonction de x, y, y', que je représenterai par $\phi(x, y, y')$, et qu'on substitue cette fonction au lieu de a, dans l'équation primitive

$$F(x, y, a) = 0,$$

on aura une équation en x, y, y' qui sera la dérivée de la proposée.

Ainsi, en désignant simplement par ϕ la fonction $\phi(x, y, y')$, on aura

$$F(x, y, \phi) = 0$$

pour l'équation dérivée.

Prenons maintenant la dérivée de celle-ci, et, comme ϕ est une fonction des variables x, y, y', on aura cette équation

$$F'(x, y) + \phi' F'(\phi) = 0,$$

où l'expression $F'(x, y)$ est la même chose que le premier membre de l'équation ci-dessus

$$F'(x, y) = 0,$$

si ce n'est qu'à la place de a il y a sa valeur ϕ, tirée de cette même équation ; d'où il suit que l'expression dont il s'agit sera identiquement nulle, puisqu'elle est censée être le résultat de la substitution de la valeur de a, qui la rend nulle.

La dérivée de l'équation du premier ordre

$$F(x, y, \phi) = 0$$

se réduira donc simplement à celle-ci

$$\phi' F'(\phi) = 0,$$

laquelle se décompose, comme l'on voit, en ces deux-ci,

$$\phi' = 0 \quad \text{et} \quad F'(\phi) = 0.$$

La première

$$\phi' = 0, \quad \text{savoir}, \quad \phi'(x, y, y') = 0,$$

est une équation du second ordre qui donne la valeur de y'' en x, y et y'.

In [23, Leçon dix-huitième, pp. 288–289]:

[...]

In [23, Leçon dix-neuvième, pp. 301–303]:

[...]

In [23, Leçon dix-neuvième, p. -305]:

Ainsi, pour ne pas anticiper sur ce qui regarde les fonctions dérivées relatives à plusieurs variables, nous avons dénoté jusqu'ici par $f'(x)$, $f''(x)$, ... les fonctions dérivées de $f(x, y)$ relatives à la seule variable x, qui, suivant la notation précédente, seraient $f'^{,}(x, y)$, $f''^{,}(x, y)$, ...

Cette manière de noter les fonctions dérivées relativement à une seule variable nous suffisait alors, et nous pourrons l'employer encore quelquefois, pour plus de commodité, pourvu qu'on soit prévenu de son identité avec la notation que nous venons d'établir.

Remark. Lagrange uses some notational conventions that are hard to accept as general unambiguous rules:

(1) he writes partial derivatives of $f(p, q)$ with respect to p and q as "$f'(p)$" and "$f'(q)$" (p. 51),

(2) he writes the derivative of a composite function $f(p, q)$ with respect to x as "$f'(p, q)$" (p. 55),

(3) he writes "f," "f'," "f''," ... instead of "$f(0)$," "$f'(0)$," "$f''(0)$," ... (p. 99),

(4) he abbreviates "$\phi(x, y, y')$" as "ϕ" (p. 193).

6.3 "Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés" (1808, 2nd edition)

1879 reprint: [26].

In [26, Introduction, pp. 14–15]:

L'Algèbre plane pour ainsi dire également sur l'Arithmétique et la Géométrie ; son objet n'est pas de trouver les valeurs mêmes des quantités cherchées, mais le système d'opérations à faire sur les quantités données pour en déduire les valeurs des quantités qu'on cherche, d'après les conditions du problème. Le tableau de ces opérations représentées par les caractères algébriques est ce qu'on nomme en Algèbre une *formule* ; et lorsqu'une quantité dépend d'autres quantités, de manière qu'elle peut être exprimée par une formule qui contient ces quantités, on dit alors qu'elle est une *fonction* de ces mêmes quantités.

L'Algèbre, prise dans le sens le plus étendu, est l'art de déterminer les inconnues par des fonctions des quantités connues, ou qu'on regarde comme connues ; et la résolution générale des équations consiste à trouver, pour toutes les équations d'un même degré, les fonctions des coefficients de ces équations qui peuvent en représenter toutes les racines.

6.4 "Théorie des fonctions analytiques" (1813, 2nd edition)

1881 reprint: [25].

In [25, Introduction, p. 15]:

> On appelle *fonction* d'une ou de plusieurs quantités toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi, dans les fonctions, on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées.
>
> Le mot *fonction* a été employé par les premiers analystes pour désigner en général les puissances d'une même quantité. Depuis, on a étendu la signification de ce mot à toute quantité formée d'une manière quelconque d'une autre quantité. Leibnitz et les Bernoulli l'ont employé les premiers dans cette acception générale, et il est aujourd'hui généralement adopté.

In [25, Première partie, chapitre II (9), p. 33]:

> `[...]`

In [25, Première partie – chapitre III (16), pp. 41–42]:

> Supposons maintenant que y soit une fonction de p et de q, que nous désignerons par $f(p,q)$; il s'agit donc de substituer $x+i$ à à la place de x dans les deux fonctions p et q. Or il est visible que l'on doit avoir le même résultat, soit qu'on fasse ces deux substitutions à la fois ou successivement, puisque les quantités p et q sont regardées comme indépendantes.
>
> En substituant d'abord $x+i$ à la place de x dans la fonction p, la fonction $f(p,q)$, regardée seulement comme fonction de p, devient
>
> $$f(p,q) + ip'f'(p) + \dots;$$

j'écris simplement $f'(p)$ pour désigner la fonction prime de $f(p, q)$, prise relativement à p seul, q étant regardée comme constante. Substituons maintenant $x + i$ pour x dans q ; la fonction $f(p, q)$ deviendra pareillement

$$f(p, q) + iq' f'(q) + \ldots,$$

où $f'(q)$ représente la fonction prime de $f(p, q)$, prise relativement à q seul, p étant regardée comme constante. Quant au terme $ip' f'(p)$, il est visible que, par cette nouvelle substitution, il se trouverait augmenté de termes multipliés par i^2, i^3, ... Ainsi les deux premiers termes de la série provenant du développement de $f(p, q)$, après la substitution de $x + i$ pour x, seront simplement

$$f(p, q) + i[p' f'(p) + q' f'(q)],$$

de sorte qu'on aura

$$y' = p' f'(p) + q' f'(q).$$

7 Legendre, Adrien-Marie Legendre (1752–1833)

[...]

8 Fourier, Joseph Fourier (1768–1830)

[...]

9 Cauchy, Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)

9.1 "Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique" [...] (1821)

1821 original: [10]. 2009 reprint: [11]. 2009 annotated English translation: [5].

In [10, Chapitre I, pp. 19–25]:

§ 1.er *Considérations générales sur les Fonctions.*

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'entre elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de *variable indépendante ;* et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable.

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, les valeurs de quelques-unes étant données, on puisse en conclure celles de toutes les autres, on conçoit ces diverses quantités exprimées au moyen de plusieurs d'entre elles, qui prennent alors le nom de *variables indépendantes ;* et les quantités restantes, exprimées au moyen des variables indépendantes, sont ce qu'on appelle des fonctions de ces mêmes variables.

Les diverses expressions que fournissent l'algèbre et la trigonométrie, lorsqu'elles renferment des variables considérées comme indépendantes, sont autant de fonctions de ces mêmes variables. Ainsi, par exemple,

$$L(x), \ \sin. x, \ \&c...,$$

sont des fonctions de la variable x ;

$$x+y, \ x^y, \ xyz, \ \&c...,$$

des fonctions des variables x et y, ou x, y et z, &c....

Lorsque des fonctions d'une ou de plusieurs variables se trouvent, comme dans les exemples précédents, immédiatement exprimées au moyen de ces mêmes variables, elles sont nommées *fonctions explicites.* Mais, lorsqu'on donne seulement les relations entre les fonctions et les variables, c'est-à-dire, les équations auxquelles ces quantités doivent satisfaire, tant que ces équations ne sont pas résolues algébriquement, les fonctions, n'étant pas exprimées immédiatement au moyen des variables, sont appelées *fonctions implicites.* Pour les rendre explicites, il suffit de résoudre, lorsque cela se peut, les équations qui les déterminent. Par exemple, y étant une fonction implicite de x déterminée par l'équation

$$L(y) = x,$$

si l'on nomme A la base du système de logarithmes que l'on considère, la même fonction, devenue explicite par la résolution de l'équation donnée, sera

$$y = A^x.$$

Lorsqu'on veut désigner une fonction explicite d'une seule variable x ou de plusieurs variable x, y, z ..., sans déterminer la nature de cette fonction, on emploie l'une des notations

$$f(x), \ F(x), \ \phi(x), \ \chi(x), \ \phi(x), \ \omega(x), \ \&c....$$
$$f(x,y,z\ldots), \ F(x,y,z\ldots), \ \phi(x,y,z\ldots), \ \&c....$$

Pour qu'une fonction d'une seule variable soit complètement déterminée, il est nécessaire et il suffit que de chaque valeur particulière attribuée à la variable on puisse déduire la valeur correspondante de la fonction. Quelquefois, pour chaque valeur de la variable, la fonction donnée en obtient plusieurs différentes les unes des autres. Conformément aux conventions adoptées dans les préliminaires, nous désignerons d'ordinaire ces valeurs multiples d'une fonction par des notations dans lesquelles la variable sera entourée de doubles traits ou de doubles parenthèses. Ainsi, par exemple,

$$\text{arc sin.}\,((x))$$

indiquera un quelconque des arcs qui ont x pour sinus,

$$\sqrt{\sqrt{}}x = \pm\sqrt{x}$$

l'une quelconque des deux racines carrées de la variable x supposée positive, &c....

§ 2.$^{\text{e}}$ *Des Fonctions simples.*

Parmi les fonctions d'une variable x, on appelle *simples* celles qui résultent d'une seule opération effectuée sur cette variable. Les fonctions simples que l'on considère ordinairement en analyse sont très-petit nombre, et se rapportent les unes à l'algèbre, les autres à la trigonométrie. L'addition et la soustraction, la multiplication et la division, l'élévation aux puissances et l'extraction des racines, enfin la formation des exponentielles et des logarithmes, produisent les fonctions simples qui se rapportent à l'algèbre. En conséquence, si l'on désigne par A un nombre constant, et par $a = \pm A$ une quantité constante, les fonctions algébriques simples de la variable x seront

$$a + x,\ a - x,\ ax,\ \frac{a}{x},\ x^a,\ A^x,\ L(x).$$

Nous ne tenons pas ici compte des racines, parce qu'on peut toujours les ramener aux puissances. Quant aux fonctions simples qui se rapportent à la trigonométrie, on pourrait en compter un grand nombre, si l'on rangeait parmi les fonctions simples toutes les lignes trigonométriques, et les arcs qui correspondent à ces mêmes lignes ; mais nous les réduirons aux quatre suivantes

$$\sin. x,\ \cos. x,$$
$$\text{arc} \sin. x,\ \text{arc} \cos. x;$$

et nous mettrons au nombre des fonctions composées les autres lignes trigonométriques $\text{tang.}\, x$, $\text{séc.}\, x$, &c. avec les arcs correspondantes, $\text{arc tang.}\, x$, $\text{arc séc.}\, x$, &c.... ; attendu que ces dernières lignes peuvent toujours être exprimées par le moyen du sinus et du cosinus. Nous pourrions même, à la rigueur, réduire les deux fonctions simples $\sin. x$ et $\cos. x$ à une seule, puisqu'elles sont liées entre elles par l'équation $\sin.^2 x + \cos.^2 x = 1$; mais l'emploi de ces deux fonctions est si fréquent, qu'il est utile de les conserver toutes deux à-la-fois dans le calcul comme fonctions simples.

§ 3.$^{\text{e}}$ *Des Fonctions composées.*

Les fonctions qui se déduisent d'une variable à l'aide de plusieurs opérations prennent le nom de *fonctions composées ;* et l'on distingue parmi ces dernières les *fonctions de fonctions* qui résultent de plusieurs opérations successives, la première opération étant effectuée sur la variable, et chacune des autres sur le résultat de l'opération précédente. En vertu de ces définitions,

$$x^x,\ \sqrt[x]{x},\ \frac{lx}{x},\ \&c....$$

sont des fonctions composées de la variable x ; et

$$l(\sin. x),\ l(\cos. x),\ \&c....$$

des fonctions de fonctions, dont chacune résulte de deux opérations successives.

Les fonctions composées se distinguent les unes des autres par la nature des opérations qui les produisent. Il semble que l'on devrait nommer *fonctions algébriques* toutes celles que fournissent les opérations de l'algèbre ; mais on a réservé particulièrement ce nom à celles que l'on forme en n'employant que les premières opérations algébriques, savoir, l'addition et la soustraction, la multiplication et la division, enfin l'élévation à des puissances fixes ; et, dès qu'une fonction renferme des exposans variables ou des logarithmes, elle prend le nom de *fonction exponentielle* ou *logarithmique.*

Les fonctions que l'on nomme algébriques se divisent en *fonctions rationnelles* et *fonctions irrationnelles.* Les fonctions rationnelles sont celles dans lesquelles la variable ne se trouve élevée qu'à des puissances entières. On appelle en particulier *fonction entière* tout polynome qui ne renferme que des puissances entières de la variable, par exemple,

$$a + bx + cx^2 + \&c....,$$

et *fonction fractionnaire* ou *fraction rationnelle* le quotient de deux semblables polynomes. Le *degré* d'une fonction entière de x est l'exposant de la plus haute puissance de x dans cette même fonction. La fonction entière du premier degré, savoir,

$$a + bx$$

s'appelle aussi *fonction linéaire,* parce que, dans l'application à la géométrie, on s'en sert pour représenter l'ordonnée d'une ligne droite. Toute fonction entière ou fractionnaire est par cela même rationnelle, et tout autre espèce de fonction algébrique est irrationnelle.

Les fonctions que produisent les opérations de la trigonométrie sont désignées sous le nom de *fonctions trigonométriques* ou *circulaires.*

Les divers noms que l'on vient d'attribuer aux fonctions composées d'une seule variable, s'appliquent également aux fonctions de plusieurs variables, lorsque ces dernières fonctions jouissent, par rapport à chacune des variables qu'elles renferment, des propriétés que supposent les noms dont il s'agit. Ainsi, par exemple, tout polynome, qui ne contiendra que des puissances entières des variables x, y, z ..., sera une fonction entière de ces variables. On appelle degré de cette fonction entière la somme des exposans des variables dans le terme où cette somme est la plus grande. Une fonction entière du premier degré, telle que

$$a + bx + cy + dz + \&c....,$$

prend le nom de fonction linéaire.

Remark. In the above quotation, the orthography of Cauchy is mostly preserved, such as *exposans*, *polynome*.

Remark. According to Florian Cajori, Cauchy used l for natural logarithms and L for logarithmes in any base $b > 1$.

9.2 "Résumé des leçons données a l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal – Tome premier" [...] (1823)

1983 original: [13].

Remark. There is no second or any other volumes, but there is a partial "continuation": "Résumé des leçons données a l'École Royale Polytechnique – Suite du calcul infinitésimal" [12].

In [13, 1.re Leçon, p. 1]:

> On nomme quantité *variable* celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. On appelle au contraire quantité *constante* toute quantité qui reçoit une valeur fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. Ainsi, par exemple, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones réguliers inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus ; et le rayon vecteur, mené du centre d'une hyperbole à un point de la courbe qui s'éloigne de plus en plus de ce centre, forme avec l'axe des x un angle qui a pour limite l'angle formé par l'asymptote avec le même axe ; &c.... Nous indiquerons la limite vers laquelle converge une variable donnée par l'abréviation *lim.* placée devant cette variable.

In [13, 2.e Leçon, p. 5]:

> Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles, que, la valeur de l'une d'entre elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de *variable indépendante ;* et les autres quantités, exprimées au moyen de la variable indépendante, sont ce qu'on appelle des *fonctions* de cette variable.

10 Lejeune Dirichlet, Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859)

10.1 "Ueber die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen" [About the representation of completely arbitrary functions using sine and cosine series] (1837)

1837 original: [32]. Appears in *G. Lejeune Dirichlet's Werke* Volume 1 [30, 31]. Quoted in [35] and in [2].

In [35, p. 74]:

> Let us suppose that a and b are two definite values and x is a variable quantity which is to assume, gradually, all values located between a and b. Now, if to each x there corresponds a unique, finite y in such a way that, as x continuously passes through the interval from a to b, $y = f(x)$ varies likewise gradually, then y is called a continuous ... function of x for this interval. It is, moreover, not at all necessary, that y depends on x in this whole interval according to the same law; indeed, it is not necessary to think of only relations that can be expressed by mathematical operations. Geometrically represented, i.e. x and y imagined as abscissa and ordinate, a continuous function appears as a connected curve, for which only one point corresponds to each abscissa between a and b.

In [2, 5.3, p. 197]:

> One thinks of a and b as two fixed values and of x as a variable quantity that can progressively take all values lying between a and b. Now if to every x there corresponds a single, finite y in such a way that, as x continuously passes through the interval from a to b, $y = f(x)$ also gradually changes, then y is called a continuous function of x in this interval. It is here not at all necessary that y depend on x according to the same law throughout the entire interval; indeed one does not even need to think of a dependence expressible by mathematical operations. Presented geometrically, that is with x and y thought of as the abscissa and ordinate, a continuous function appears as a connected [zusammenNingende] curve which for every value of the abscissa contained between a and b has only one point. This definition prescribes no common law for the individual parts of the curve; one can think of it as being put together from the most dissimilar parts or drawn entirely arbitrarily. It follows from this that a function of this kind can only be seen as completely determined in an interval when it is either given graphically for its entire range or subjected to mathematically valid laws for its individual parts. As long as one has determined the function for only a part of the interval, the manner of its extension to the rest of the interval remains completely arbitrary (Dirichlet, 1837, pp. 135–6).

Remark. According to Umberto Bottazini [2, 5.3, p. 200], the Dirichlet's definition of *continuous function* has been systematically misquoted and misinterpreted, leaving out the adjective "continuous."

11 Jacobi, Carl Gustav Jacob Jacobi (1814–1851)

11.1 "De Determinantibus functionalibus" [On functional determinants] (1841)

See [21].

In [21, p. 319]:

1.

> In Commentatione anteriore proprietates praecipuas Determinantium enarravi, quae ad quodcunque elementorum systema pertinet. In hac Commentatione supponam, elementa Determinantis esse differentialia partialia systematis functionum totidem variabilium, harum variabilium respectu sumta. Eiusmodi Determinantia per totam Analyticam gravissimas partes agere constat, quin etiam in variis quaestionibus ad systema functionum plurium variabilium pertinentibus similes vices gerere atque quotientem differentialem functionis unius variabilis. Quod egregie declarant varia theoremata quae de Determinantibus illis aliis occasionibus proposui. Qua de re fortasse couvenit ea Determinantia propria appellatione *Determinantium functionalium* insignire. Quemadmodum autem Determinantium functionalium proprietates ex iis quae de Determinantibus algebraicis constant derivabimus, ita Determinantium proprietates algebraicorum vice versa e Determinantium functionalium proprietatibus deduci possunt. Statuendo enim, ipsas
>
> $$f,\ f_1,\ f_2\ \dots\ f_n$$
>
> esse functiones lineares variabilium $x,\ x_1\ \dots\ x_n$,
>
> $$f_k = a_k x + a'_k x_1 + a''_k x_2 \cdots + a^{(n)}_k x_n,$$
>
> fit
>
> $$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = a^{(i)}_k,$$
>
> ideoque Determinans, ad systema elementorum $a^{(i)}_k$ quodcunque pertinens, haberi potest pro Determinante ad systema differentialium parlialium,
>
> $$\frac{\partial f_k}{\partial x_i},$$
>
> pertinente sive pro Determinante functionali.
>
> [...]

Remark. In the above quotation, one obvious (typographic?) error was fixed: one "x^n" had to be replaced with "x_n."

In [21, pp. 320–322] (see also [6, p. 237]):

2.

Ut distinguerentur differentialia *partialia* a *vulgaribus* seu in quibus variabilis omnes ut unius variabilis functiones considerantur, *Eulerus* aliique differentialia partialia uncis includere consueverunt. Sed quia uncorum accumulatio et legenti et scribenti molestior fieri solet, praetuli characteristica

$$d$$

differentialia vulgaria, differentialia autem partialia characteristica

$$\partial$$

denotare. De qua re ubi couvenitur, erroris locus esse non potest. Itaque si f ipsarum x et y functio est, scribam

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Si qua unam tantum variabilem continet functio, perinde characteristica d vel ∂ uti licet. Eadem uti licet distinctione in denotandis integrationibus, ita ut expressiones,

$$\int f(x,y)\,dx, \qquad \int f(x,y)\,\partial x,$$

inter se distinguantur ; scilicet in illa consideratur y ideoque etiam $f(x,y)$ ut ipsius x functio, in hac integratio respectu solius x perficienda est atque y inter integrationem pro Constante habetur.

Alias proposuit notationes ill. *Lagrange*, quibus et ipsis saepenumero cum commodo uti licet. Etenim si f plurium variabilium x, y, z functio est, denotat per f' differentiale totale, hoc est expressionem,

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z',$$

ubi x', y', z' sunt differentialia ipsarum x, y, z eius respectu variabilis sumta quae pro independente assumta est. Contra differentialia *partialia* denotat scribendo post signum f' eam variabilem, cuius respectu differentiatio partialis instituenda est dum reliquae pro Constantibus habentur, ita ut sit,

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Si duarum tantum variabilium functiones proponuntur, ille super- et supponendo lineolas denotat, quot vicibus functio respectu alterutrius variabilis differentianda sit, ita ut ex. gr. $f''_{\prime\prime\prime}$ idem sit atque $\dfrac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^3}$. Deficit *Lagrangiana* notatio, si functionis trium pluriumve variabilium differentialia altiora quam prima exhibenda sunt, neque eiusmodi differentialia in *Theoria Functionum* obveniunt.

Ut functionis plures variabiles involventis differentiale partiale sit definitum, non sufficit indicare et functionem differentiandam et variabilem cuius respectu differentiandum est, sed insuper necesse est indicetur, quaenam sint quantitates, quae inter differentiandum constantes manent. Sit enim f ipsarum $x,\ x_1\ \dots\ x_n$ functio, assumtis illarum variabilium n functionibus $\omega_1,\ \omega_2\ \dots\ \omega_n$ si ipsa f pro variabilium $x,\ \omega_1,\ \omega_2\ \dots\ \omega_n$ functione habetur, variante x non amplius constantes erunt $\omega_1,\ \omega_2\ \dots\ \omega_n$, si $x_1,\ x_2\ \dots\ x_n$ constantes manent, neque si $\omega_1,\ \omega_2\ \dots\ \omega_n$ constantes manent, etiam constantes erunt $x_1,\ x_2\ \dots\ x_n$. Expressio autem $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ prorsus diversos valores indicabit, sive hae sive illae quantitates inter differentiandum constantes sunt. Ex. gr. in functione f duarum variabilium x at y ipsius y loco introducatur ipsarum $x,\ y$ functio quaedam u pro altera variabili independente, quod antea erat differentiale $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, iam erit

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x},$$

ita ut idem signum $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ valores prorsus diversos significet, prout y vel u constans manet dum f respectu ipsius x differentiatur. Qua de re et in hac et in aliis Commentationibus quoties Differentialium Partialium usus erit, dicendo variabilium $x,\ x_1\ \dots\ x_n$ ipsam f esse functionem, non tantum indicabo, ipsam f a variabilibus illis pendere, constantem manere si illae constantes maneant, variari si varientur, quod idem locum haberet, si ipsarum $x,\ x_1\ \dots\ x_n$ loco aliae quaecunque variabiles $\omega,\ \omega_1\ \dots\ \omega_n$ earum functiones, ut independentes introducerentur: sed *ipso dicendo f variabilium $x,\ x_1\ \dots\ x_n$ esse functionem subintelligam, quoties ea functio per partes differentietur ita instituendam esse differentiationem ut ex ipsis illis variabilibus semper una tantum varietur dum reliquae omnes constantes maneant.*

Nec minus quoad signa, ut formulae omni ambiguitate eximerentur, necesse esset ut non tantum indicaretur variabilis cuius respectu differentiatur, sed simul totum systema variabilium independentium, quarum functio per partes differentianda proponitur, ut ipso signo eae quoque quantitates quae inter differentiandum *constantes* maneant cognoscerentur. Quod eo magis necessarium possit videri, quia evitari nequit quin in eadem Ratiocinatione vel etiam in una eademque formula inveniantur differentialia partialia ad diversa variabilium independentium systemata referenda, veluti in expressione supra proposita,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x},$$

in qua f pro ipsarum quidem x et u, sed u pro ipsarum x et y functio habenda est. In quam expressionem matabatur $\dfrac{\partial x}{\partial f}$, si u loco y pro variabili independente introducitur. Quod, si adscribuntur variabili dependenti independentes ad quas differentiationes partiales referuntur, indicari poterit per hanc formulam, omni ambiguitate exemtam,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,u)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}.$$

Sed notatio, in aequatione antecedente adhibita, sicuti aliae omnes, quae fingi possunt ad differentialia partialia ipsa significandi ratione omnino definienda, in quaestionibus certe generalioribus et formulis magis complicatis molestissima evaderet nec ferenda esset; scilicet pro maiore variabilium independentium numero pluribusque terminis eveniret ut formula, quam una tantum linea repraesentare licet, totam paginam occuparet. Quando sine graviore incommodo licet quamquam maxime affectanda sunt signa, quibus et omnis ambiguitas tollatur et formulae sine interpretatione verbali adiecta per se clarae et intelligibiles fiant, in hoc tamen casu propter summam illam nec evitandam prolixitatem acquiescendum esse putavi in notatione differentialium quae variabilium independentium indicationi supersedet. Neque eveniet ut lectori intelligenti et ratiocinia sedulo persequenti in dubitationem venire possit, ad quodnam variabilium independentium systema singula differentialium partialia referantur. Interim ubi ratum videtur, quo facilius duo differentialium partialium systema diversis variabilium systematis respondentia inter se distinguantur, alterum more *Euleriano* uncis includam.

Remark. (1) Unlike the previously quoted authors, Jacobi seems to mix up differentials with derivatives.

(2) Unlike the previously quoted authors, Jacobi seems to mix up the meanings of "$f(x)$" and "f." However, already Joseph-Louis Lagrange in 1797–1806 was reckless in a similar way when he abbreviated "$\phi(x,y',y'')$" as "ϕ," wrote partial derivatives of $f(p,q)$ as "$f'(p)$" and "$f'(q)$," and wrote "f," "f'," "f''," … to mean "$f(0)$," "$f'(0)$," "$f''(0)$," ….

12 Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897)

[...]

13 Hermite, Charles Hermite (1822–1901)

[...]

14 Riemann, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866)

14.1 "Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functioneneiner veränderlichen complexen Grösse" [Foundations for a general theory of functions of a complex variable] (1851)

2004 English translation of the 1867 (2nd) printing: "Foundations for a general theory of functions of a complex variable" [18].

In [18, p. 1]:

> Denote by z a variable that can take successively all possible real values. When there is a unique value of the variable w corresponding to each z, we say that w is a function of z. If w varies continuously when z runs continuously over all values between two given points, we say that the function is continuous in this interval.
>
> This definition clearly enforces no law between individual values of the function. For when the function is specified in a certain interval, the method of continuing it outside the interval remains entirely arbitrary.
>
> The dependence of the quantity w on z can be expressed by a mathematical law, so that definite operations at each value of z yield the corresponding w. The possibility of a single law of dependence for all values of z in a given interval was formerly ascribed only to a certain class of functions (*functiones continuae* in Euler's terminology). More recent researches have shown, however, that there are analytic expressions that represent each continuous function on a given interval. Hence it is one and the same thing to say that w depends on z in some arbitrary given manner; or that w is given by definite operations. Both notions are equivalent, in view of the results mentioned.
>
> This is not the case, however, if z is not restricted to real values, but varies over complex numbers of the form $x + yi$ (where $i = \sqrt{-1}$).

15 Dedekind, Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916)

15.1 "Was sind und was sollen die Zahlen?" [What are numbers and what should they be?] (1888)

`[...]`

Quoted in [35].

In [35, p. 75]:

> By a mapping of a system S a law is understood, in accordance with which to each determinate element s of S there is associated a determinate object, which is called the image of s and is denoted by $\phi(s)$; we say, too, that $\phi(s)$ corresponds to the element s, that $\phi(s)$ is caused or generated by the mapping ϕ out of s, that s is transformed by the mapping ϕ into $\phi(s)$.

16 Jordan, Camille Jordan (1838–1922)

16.1 "Cours d'analyse de l'École Polytechnique – Tome I" (1909, 3rd edition)

1909 third edition: [22].

In [22, I.III, pp. 31–32]:

> 41. Des quantités variables, x, y, ..., sont dites *indépendantes,* s'il n'existe entre elles aucun lien, de telle sorte que chacune d'elles puisse encore prendre toutes les valeurs dont elle est susceptible, après qu'on a fixé la valeur des autres.
>
> Soit, au contraire, u une nouvelle variable, liée aux précédentes de telle sorte qu'à chaque point $(x, y, \dots)$ appartenant à un certain ensemble E corresponde une valeur déterminée de u. On dira que cette relation définit u comme *fonction* de x, y, ... dans l'ensemble E.
>
> Une fonction de x, y, ... peut se représenter par la notation $f(x, y, \dots)$. So l'on considère simultanément plusieurs fonctions différentes, on pourra les désigner respectivement par $F(x, y, \dots)$, $\phi(x, y, \dots)$, ... en changeant la lettre initiale.
>
> La définition qui précède est d'une telle généralité qu'il est évidemment impossible d'établir aucune propriété applicable à toutes les fonctions sans exception. Des hypothèses restrictives sont, en effet, nécessaires pour servir de base à un raisonnement quelconque.
>
> 42. Fonctions bornées. — Une fonction $f(x, y, \dots)$ est dite *bornée,* dans un ensemble E pour lequel elle est définie, si les valeurs qu'elle prend pour les divers points $(x, y, \dots)$ de cet ensemble forment un ensemble borné.
>
> *La somme, la différence et le produit de deux fonctions bornées f et ϕ sont des fonctions bornées ;* car on a
>
> $$|f \pm \phi| \mathrel{\overline{\overline{<}}} |f| + |\phi|\,,$$
> $$|f.\phi| = |f|\,|\phi|\,.$$
>
> *Si f est une fonction bornée et si le minimum μ de son module n'est pas nul, $\dfrac{1}{f}$ sera également bornée ;* car on a
>
> $$\left|\frac{1}{f}\right| = \frac{1}{|f|} < \frac{1}{\mu}.$$

Remark. Like Carl Jacobi, Jordan is inconsistent: he mixes up the meanings of "$f(x, y, \dots)$" and "f."

17 Cantor, Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918)

[...]

18 Poincaré, Henri Poincaré (1854–1912)

[...]

[...]

19 Goursat, Édouard Jean-Baptiste Goursat (1858–1936)

19.1 "Cours d'analyse mathématique – Tome I" (1933, 5th edition)

1933 5th edition: [19].

In [19, I.II.6, p. 11–12]:

> La définition moderne du mot *fonction* est due à Cauchy et Riemann. On dit que y *est un fonction de* x *lorsque à une valeur de* x *correspond une valeur de* y. On indique cette dépendance par l'égalité $y = f(x)$. La plupart des fonctions que nous étudierons sont définies analytiquement, c'est-à-dire par l'indication des opérations qu'il faudrait effectuer pour déduire la valeur de y de celle de x, mais le plus souvent cette circonstance n'intervient pas dans les raisonnements. Soient a et b deux nombres fixes $(a < b)$; si à tout nombre x compris entre a et b correspond un nombre y, on dit que la fonction $f(x)$ est définie dans l'intervalle (a, b). [...]

20 Volterra, Vito Volterra (1860–1940)

20.1 "Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni" [On functions that depend on other functions] (1887)

[...]

21 Hilbert, David Hilbert (1862–1943)

[...]

22 Hadamard, Jacques Salomon Hadamard (1865–1963)

22.1 "Leçons sur le calcul des variations – Tome I" (1910)

1910 original: [20].

In [20, I.1, p. 1]:

Considérons une fonction réelle de variables réelles $f(x_1, \dots x_n)$ définie dans un certain domaine D de l'espace à n dimensions, lieu du point $(x_1, \dots x_n)$: par exemple, dans une aire, si $n = 2$. On dira que cette fonction a un *maximum absolu* pour le point M_0 $(x_{10}, \dots x_{n0})$ du domaine D si l'on a, en tout point M_0 $(x_1, \dots x_n)$ de D,

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) \leqslant f(x_{10}, x_{20}, \dots x_{n0}); \tag{1}$$

un minimum absolu, si, dans les mêmes conditions, on a

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) \geqslant f(x_{10}, x_{20}, \dots x_{n0}) \tag{1'}$$

Nous dirons (en modifiant légèrement une locution introduite par M. Borel) qu'une inégalité a lieu *au sens strict*, lorsqu'elle exclut l'égalité ; dans le cas contraire (qui est celui des inégalités (1) (1′) telles que nous les avons écrites) l'inégalité est dite avoir lieu *au sens large.*

In [20, I.3, p. 3]:

Il n'en va plus de même si l'on restreint le choix de la fonction f. On sait ainsi, *qu'une fonction f continue dans un domaine fini D (frontière comprise) a sûrement au moins un maximum et un minimum absolus dans D ou sur sa frontière.*

Remark. Like Camille Jordan, Hadamard mixes up the meanings of "$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$" and "f."

23 De la Vallée Poussin, Charles-Jean de la Vallée Poussin (1866–1962)

23.1 "Cours d'analyse infinitésimale – Tome I" [Course of infinitesimal analysis – Volume I] (1923, 5th Edition)

[...]

[...]

24 Levi-Civita, Tullio Levi-Civita (1873–1941)

24.1 "Lezioni di calcolo differenziale assoluto" [Lessons of the absolute differential calculus] (1925)

[...]

[...]

25 Carathéodory, Constantin Carathéodory (1873–1950)

25.1 "Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung" [Calculus of variations and partial differential equations of the first order] (1935)

1935 original: [9]. 1965–1967 English translation: "Calculus of variations and partial differential equations of the first order" [8, 7].

In [8, Chapter 1, § 3, p. 5]:

> **Theorem 3.** If we denote by B the subset of A in which a given sequence of functions $\{f_k(P)\}$ converges to a limit function $f(P)$, then every accumulation point P_0 of B, which is a point of A and at which the sequence under consideration is normal, belongs to B, and moreover $f(P)$ is continuous at the point P_0.

In [8, Chapter 1, § 1, p. 3]:

> *Definition.* A sequence of uniformly bounded functions
>
> $$f_1(P),\ f_2(P), \cdots,$$
>
> that are defined on an arbitrary point set A of an n-dimensional space, is said to converge continuously at an accumulation point P_0 of A if every possible sequence of points $P_1, P_2, \cdots$, which lie in A and converge to P_0, the $\lim\limits_{k=\infty} f_k(P_k)$ always exists and represents a unique number.

In [8, Chapter 1, § 6, p. 8]:

> If by any rule whatsoever there corresponds to each function $f(P)$ of our normal family a number $J(f(P))$, then $J(f(P))$ is called a functional (or also a function of a function); such a functional is said to be continuous if whenever $\lim\limits_{k=\infty} f_k(P) = f(P)$ then
>
> $$\lim_{k=\infty} J(f_k(P)) = J(f(P)).$$

In [8, Chapter 1, § 6, p. 9]:

> **Theorem 2.** If a continuous functional $J(f(P))$ is given, which is defined for all functions of a closed normal family, then there exists at least one function $f_0(P)$ of this family for which
>
> $$J(f(P)) \geqq J(f_0(P)).$$

26 Luzin, Nikolai Luzin (1883–1950)

26.1 "Function (in mathematics)" (1935, The Great Soviet Encyclopedia, Vol. 5, pp. 314–334)

`[...]`

27 Dines, Lloyd Lyne Dines (1885–1964)

27.1 "The development of the function concept" (1919)

In [16, pp. 105–106]:

> We now come to the latest extension of the function concept, a precise formulation of which is a product of the last ten years, though the essence of the idea is much older. I warn you in advance that it is abstract. But I also remind you that it is the abstractness of mathematics which makes it of universal application. I will also endeavor to forestall possible adverse criticism by stating in advance that this generalization has already justified itself by unifying fields previously considered distinct, thus mutually enriching them as did the discovery of Descartes in the seventeenth century. Let me also encourage you by saying that it is quite as simple as the idea of Descartes. It is nothing more nor less than the Dirichlet definition generalized by the removal of the restriction that x and y must represent real numbers. To get the thing before us clearly, I first define what we shall mean by a variable, and then define the expression function of a variable.
>
> *Definition of Variable:* A variable is simply a symbol, say p, which in a given discussion may be used to denote any one of a given set of objects. The set of objects, any one of which may be represented by p, is called the range of the variable p.
>
> *Definition of Function of a Variable:* If p is a variable whose range is a class of objects P, and q is a second variable whose range is a class of objects Q, and if the variable q is so related to the variable p that when p is given a definite value on the range P, q has a definite value on the range Q, then q is said to be a function of p, or more explicitly, a function on the range P, to the range Q. We may express the functional relation notationally by the equation
>
> $$q = f(p).$$
>
> If in particular the range P of p is the class of real numbers between two limits a and b, and the range Q of q is the class of real numbers, this definition reduces to that of Dirichlet. The generality of our present definition lies solely in the generality of the ranges of the two variables.

28 Courant, Richard Courant (1888–1972)

28.1 "Differential and integral calculus – Volume I" (1937, 2nd English edition)

1988 reprint of the 1937 (2nd) English edition: [14].

In [14, I.2, pp. 14–15]:

Examples.

(a) If an ideal gas is compressed in a vessel by means of a piston, the temperature being kept constant, the pressure p and the volume v are connected by the relation

$$pv = C,$$

where C is a constant. This formula, called *Boyle's Law*, states nothing about the quantities v and p themselves, but has the following meaning: if p has a definite value, arbitrarily chosen in a certain range (the range being determined physically and not mathematically), then v can be determined, and conversely:

$$v = \frac{C}{p}, \quad p = \frac{C}{v}.$$

We then say that v is a function of p, or in the converse case that p is a function of v.

(b) If we heat a metal rod, which at temperature $0°$ has length l_0, to the temperature $\theta°$, then its length I will be given, on the simplest physical assumptions, by the law

$$l = l_0(1 + \beta\theta),$$

where β, the "coefficient of expansion", is a constant. Again we say that l is a function of θ.

(c) In a triangle let the lengths of two sides, say a and b, be given. If for the angle γ between these two sides we choose any arbitrary value less than $180°$ the triangle is completely determined; in particular, the third side c is determined. In this case we say that if a and b are given c is a function of the angle γ. As we know from trigonometry, this function is represented by the formula

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma)}.$$

2. Formulation of the Concept of Function.

In order to give a general definition of the mathematical concept of function, we fix upon a definite interval of our number scale, say the interval between the numbers a and b, and consider the totality of numbers x which belong to this interval, that is, which satisfy the relation

$$a \leqq x \leqq b.$$

If we consider the symbol x as denoting at will any of the numbers in this interval, we call it a (*continuous*) *variable* in the interval.

If now to each value of x in this interval there corresponds a single definite value y, where x and y are connected by any law whatsoever, we say that y *is a function of* x, and write symbolically

$$y = f(x), \quad y = F(x), \quad y = g(x),$$

or some similar expression. We then call x the *independent variable* and y the *dependent variable*, or we call x the *argument* of the function y.

It should be remarked that for certain purposes it makes a difference whether in the interval from a to b we include the end-points, as we have done above, or exclude them; in the latter case, the variable x is restricted by the inequalities

$$a < x < b.$$

To avoid misunderstanding we may call the first kind of interval (including end-points) a *closed* interval, the second kind an *open* interval. If only *one* end-point and not the other is included (as for example $a < x \leqq b$) we speak of an interval *open at one end* (in this case the end a). Finally, we may also consider open intervals which extend without bound in one direction or both. We then say that the variable x ranges over an *infinite* (open) interval, and write symbolically

$$a < x < \infty \quad \text{or} \quad -\infty < x < b \quad \text{or} \quad -\infty < x < \infty.$$

In the general definition of a function which is defined in an interval nothing is said about the nature of the relation by which the dependent variable is determined when the independent variable is given. This relation may be as complicated as we please, and in theoretical investigations this wide generality is an advantage. But in applications, and in particular in the differential and integral calculus, the functions with which we have to deal are not of the widest generality; on the contrary, the laws of correspondence by which a value of y is assigned to each x are subject to certain simplifying restrictions.

28.2 With Fritz John: "Introduction to Calculus and Analysis - Volume I" (1965)

1989 reprint of the 1965 edition: [15].

In [15, 1.2, pp. 17–18]:

1.2 The Concept of Function

From the beginning of modern mathematics in the 17th century the concept of function has been at the very center of mathematical thought. (Leibnitz appears to have been the first to Use the word "function".) Although the idea of functional relationships is significant far beyond the mathematical domain, we shall naturally focus our attention on functions in the mathematical sense, that is, on the connection of mathematical quantities by mathematical relations or prescriptions or "operations." A very large part of mathematics and the natural sciences is dominated by functional relationships, for they occur everywhere in analysis, geometry, mechanics, and other fields. For example, the pressure in an ideal gas is a function of density and temperature; the position of a moving molecule is a function of the time; the volume and surface of a cylinder are functions of its radius and height. Whenever the values of certain quantities $a, b, c, \ldots$ are determined by those of certain others $x, y, z, \ldots$, we say that $a, b, c, \ldots$ *depend* on $x, y, z, \ldots$ or are *functions* of $x, y, z, \ldots$. Examples of functional relations are given by formal expressions such as the following.

(a) The formula $A = a^2$ defines A as a function of a. For $a > 0$ we can interpret A as the area of a square of side a.

(b) The formula

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

defines y as a function of x for all x for which $-1 \leq x \leq 1$. For $x > 0$ this function expresses the side y of a right triangle with hypotenuse 1 in terms of the other side x.

(c) The equations

$$x = t, \quad y = -t^2$$

assign values of x and y to each t and thus define x and y as functions of t. If we interpret x and y as the rectangular coordinates of a point P in the plane and t as the time, then our equations describe the location of P at the time t; in other words, they describe the *motion* of the point P.

(d) The equations

$$a = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad b = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

define a and b as functions of x and y for $x^2 + y^2 \neq 0$. Interpreting the pairs of values x, y and a, b as rectangular coordinates of two points, we see that the equations assign to each point (x, y) [with the exception of the origin $(0, 0)$] an "image" (a, b). The reader can verify easily that the image (a, b) always lies on the same ray from the origin as the "original" or "antecedent" (x, y) and has the reciprocal distance from the origin. We speak of "mapping" (x, y) onto (a, b) by means of the equations expressing a, b in terms of x, y.

In the preceding examples the functional law is expressed by simple formulas which determine certain quantities in terms of certain others. The quantities appearing on the left-hand sides, the "dependent variables," are expressed in terms of the "independent variables" on the right. The mathematical law assigning unique values of the dependent variables to given values of the independent variables is called a function. It is unaffected by the names x, y, etc., for these variables. In Example c we have an independent variable t and two dependent variables x, y, whereas in Example d there are two independent variables x, y and two dependent variables a, b.

The dependence of y on x by a functional relation is frequently indicated by the brief expression "y is a function of x."

Remark. The authors seem to contradict themselves: first, they call some *variables* functions, and later they say that a *law* is called a function.

29 Menger, Karl Menger (1902–1985)

29.1 "The ideas of variable and function" (1953)

[...]

29.2 "On variables in mathematics and in natural science" (1954)

[...]

29.3 "Calculus – A modern approach" (1955, new edition)

1955 new edition: [34].

In [34, pp. xi–xii]:

> **What Is A Variable?**
>
> The conceptual and semantic clarification of calculus is centered on the analysis of the hitherto obscure general term "variable," which is resolved into an extensive spectrum of well-defined meanings.
>
> The only clear (if one-sided) definition heretofore formulated goes back to Weierstrass who, in his celebrated lectures in the 1880's, defined it as a symbol that stands for any number or any element belonging to a certain class of numbers. Bertrand Russell, who at the turn of the century investigated the various aspects of variables probably more thoroughly than anyone before him, said: "Variable is perhaps the most distinctly mathematical of all notions; it is certainly also one of the most difficult to understand ... and in the present work [*The Principles of Mathematics*, 1903] a satisfactory theory as to its nature, in spite of much discussion, will hardly be found." In fifty years this situation has not been improved.
>
> In this book a solution of the problem is attempted by distinguishing and making precise various equally important uses of the term "variable" in pure and applied calculus. Some of these variables differ from each other as profoundly as do trigonometric and geometric tangents. But whereas no one has, on account of a flimsy equivocation, confused tangents of angles and tangents of curves, this book seems to be the first to maintain clear distinctions between the following three concepts:
>
> I. Variables according to Weierstrass, herein called *numerical variables*, as x and y in
>
> (1) $\quad \mathrm{x}^2 - 9\mathrm{y}^2 = (\mathrm{x} + 3\mathrm{y}) \cdot (\mathrm{x} - 3\mathrm{y})$ for any two numbers x and y.
>
> Here, as throughout this book, the numerical variables are printed in roman type. Without any change of the meaning, x and y may be replaced by any two non-identical letters, e.g., by a and b or by y and x; that is to say, two numerical variables may be interchanged:
>
> $$\mathrm{y}^2 - 9\mathrm{x}^2 = (\mathrm{y} + 3\mathrm{x}) \cdot (\mathrm{y} - 3\mathrm{x}) \quad \text{for any two numbers y and x}$$

is tantamount to (1). In calculus, numerical variables may be used or they may, as will be shown herein, be dispensed with.

II. Variables or variable quantities in the sense in which scientists use these terms; for instance, t, the time; s, the distance traveled (in chosen units); x and y, the abscissa and ordinate in a physical or postulational plane (relative to a chosen frame of reference); etc. These "variables" are defined and thoroughly discussed in Chapter VII under the names of *consistent classes of quantities* and – reviving Newton's terminology – of *fluents*. They are herein consistently denoted by letters in italic type. Fluents cannot be dispensed with in formulas expressing scientific laws, such as Galileo's

$$s = 16t^2. \tag{2}$$

Nor can they be interchanged:

$$2x + 3y = 5 \quad \text{and} \quad 2y + 3x = 5$$

are different lines. (If, on the other hand, in pure analytic geometry, the first of these two lines is defined as

the class of all pairs (x, y) of numbers such that $2\mathrm{x} + 3\mathrm{y} = 5$,

where x and y are numerical variables, then

the class of all pairs (y, x) of numbers such that $2\mathrm{y} + 3\mathrm{x} = 5$

is an equivalent definition.)

III. Variables in the sense of u and w in statements such as

$$\text{If } w = 16u^2, \text{ then } \frac{\mathbf{d}\, w}{\mathbf{d}\, u} = 32u \text{ for any two fluents, } u \text{ and } w. \tag{3}$$

These "variables" belong to a third type, first explicitly introduced by the author in 1952 (see Bibliography). They are herein referred to as *fluent variables*, since they partake in characteristics of numerical variables as well as of fluents. In (3), u and w may be replaced by any two elements of a certain class – but not by two numbers. If u were replaced by 3, and w by 144, then the antecedent $144 = 16 \cdot 3^2$ would be valid, and yet the consequent $\frac{\mathbf{d}\ 144}{\mathbf{d}\ 3} = 32 \cdot 3$, utterly nonsensical. What u and w in (3) may be replaced by are fluents, such as t and s regarding a motion, or x and y along a plane curve:

$$\text{If } s = 16t^2, \text{ then } \frac{\mathbf{d}\, s}{\mathbf{d}\, t} = 32t\,; \tag{3$'$}$$

$$\text{If } y = 16x^2, \text{ then } \frac{\mathbf{d}\, y}{\mathbf{d}\, x} = 32x\,. \tag{3$''$}$$

[...]

29.4 "What are x and y?" (1956)

[...]

30 Church, Alonzo Church (1903–1995)

[...]

31 Mac Lane, Saunders Mac Lane (1909–2005)

31.1 "Categories for the working mathematician" (1998, 2nd edition)

1998 second edition: [33].

In [33, Introduction, p. 1]:

> Category theory starts with the observation that many properties of mathematical systems can be unified and simplified by a presentation with diagrams of arrows. Each arrow $f\colon X \to Y$ represents a function; that is, a set X, a set Y, and a rule $x \mapsto fx$ which assigns to each element $x \in X$ an element $fx \in Y$; whenever possible we write fx and not $f(x)$, omitting unnecessary parentheses. [...]

In [33, I.1, p. 8]:

> A metacategory is to be any interpretation which satisfies all these axioms. An example is the *metacategory of sets*, which has objects all sets and arrows all functions, with the usual identity functions and the usual composition of functions. Here "function" means a function with specified domain and specified codomain. Thus a function $f\colon X \to Y$ consists of a set X, its domain, a set Y, its codomain, and a rule $x \to fx$ (i.e., a suitable set of ordered pairs $\langle x, fx\rangle$) which assigns, to each element $x \in X$, an element $fx \in Y$. These values will be written as fx, f_x, or $f(x)$, as may be convenient. [...]

32 Schwartz, Laurent-Moïse Schwartz (1915–2002)

32.1 "Cours d'analyse" (1967)

[...]

33 Feynman, Richard Phillips Feynman (1918–1988)

33.1 "The Feynman lectures on physics" (2013, New Millennium edition)

[...]

34 Rudin, Walter Rudin (1921–2010)

34.1 “Principles of mathematical analysis” (1976, 3rd edition)

`[...]`

35 Lang, Serge Lang (1927–2005)

35.1 “A first course in calculus” (1986, 5th edition)

```
Pages: 14, 63, 95, 113...
  [...]
```

35.2 “Calculus of several variables” (1987, 3rd edition)

```
Pages: 100, 118, 119...
  [...]
```

36 Bourbaki (1935–)

36.1 “Théorie des ensembles” (1970)

2006 reprint of the 1970 original: [4].

In [4, Chapitre II, § 3, N° 4, p. II.13]:

> DÉFINITION 9. — *On dit qu'un graphe F est un graphe fonctionnel si, pour tout x, il existe au plus un objet correspondant à x par F* (I, p. 40)*. On dit qu'une correspondance $f = (F, A, B)$ est une fonction si son graphe F est un graphe fonctionnel, et si son ensemble de départ A est égal à son ensemble de définition* $\mathrm{pr}_1\, F$*. Autrement dit, une correspondance $f = (F, A, B)$ est une fonction si, pour tout x appartenant à l'ensemble de départ A de f, la relation $(x, y) \in F$ est fonctionnelle en y* (I, p. 41) ; *l'objet unique correspondant à x par f s'appelle la valeur de f pour l'élément x de A, et se désigne par $f(x)$ ou f_x* (ou $F(x)$, ou F_x).

In [4, Fascicule de résultats, § 2, N° 1, p. R.{5–6}]:

> Soient E et F deux ensembles, distincts ou non. Une relation entre une variable x de E et une variable y de F est dite *relation fonctionnelle en y*, si, *quel que soit $x \in E$, il existe un élément y de F et un seul, qui soit dans la relation considérée avec x.*
>
> On donne le nom de *fonction* à l'opération qui associe ainsi à tout élément $x \in E$ l'élément $y \in F$ qui se trouve dans la relation donnée avec x ; on dit que y est la *valeur* de la fonction pour l'élément x, et que la fonction est *déterminée* par la relation fonctionnelle considérée. Deux relations fonctionnelles *équivalentes* déterminent la *même* fonction. On dit qu'une telle

fonction « prend ses valeurs dans F » et qu'elle est « définie dans (ou sur) E », ou encore que c'est une « fonction d'un argument (ou d'une variable) parcourant E » ; plus brièvement, on dit aussi que c'est une *application de E dans F*. Au lieu de dire : « Soit f une application de E dans F », on dira aussi : « Soit $f: E \to F$ une application » (ou même : « Soit $f: E \to F$ » si cela n'entraîne pas confusion).

36.2 "Fonctions d'une variable réelle" (1976)

2006 reprint of the 1976 original: [3].

In [3, Chapitre III, § 1, N° 1, p. III.2]:

> La définition du nombre e montre qu'on a
>
> $$\mathrm{D}(e^x) = e^x \tag{3}$$
>
> ce qui prouve que e^x est strictement croissante, et par suite que $e > 1$.

In [3, Chapitre III, Note historique, p. III.48]:

> [...]

In [3, Chapitre III, Note historique, pp. III.{51–52}]:

> [...]

37 Comments by historians

37.1 Bos, Hendrik Jan Maarten Bos (1940–)

37.1.1 "Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus" (1974)

1974 article: [1].

In [1, Section 1, p. 4]:

> **1.1.** There are three processes in the history of analysis in the seventeenth and eighteenth centuries which are of crucial importance for the history of the concept of the differential. The first is the introduction, in the 1680's and 1690's, of the LEIBNIZIAN infinitesimal analysis within the body of the CARTESIAN analysis, which at that time may be characterised as the study of curves by means of algebraic techniques.
>
> The second process, occurring roughly in the first half of the eighteenth century, was the separation of analysis from geometry. From being a tool for the study of curves, analysis developed into a separate branch of mathematics, whose subject matter was no longer the relations between geometrical quantities connected with a curve, but relations between quantities in general as expressed by formulas involving letters and numbers.

This change of interest from the curve to the formula induced a change in fundamental concepts of analysis. While in the geometrical phase the fundamental concept in the analytical study of curves was the *variable geometrical quantity*, the separation of analysis from geometry made possible the emergence of the concept of *function of one variable*, which eventually replaced the variable geometrical quantity as the fundamental concept of analysis.

In this process of separation from geometry the differential underwent a corresponding change; it was stripped of its geometric connotations and came to be treated as a mere symbol, like the other symbols occurring in formulas. However, throughout the first half of the eighteenth century the differential kept its position as the fundamental concept of the LEIBNIZIAN infinitesimal calculus.

The third process in which we are interested is the replacement of the differential by the derivative as fundamental concept of infinitesimal analysis. Usually this process is connected with the works of LAGRANGE and CAUCHY, but I shall argue that an important aspect of it is to be found in the works of EULER.

In [1, Section 1, p. 6]:

1.4. CARTESIAN analysis introduced the use of equations to represent and analyse the relations between the variables connected with the curve; usually the relation between ordinate and abscissa was taken as fundamental.

It is important to notice the absence of the concept of *function* in this context of algebraic relations between variables. Neither the equations nor the variables are functions in the sense of a mapping $x \to y(x)$, that is, a unidirectional relation between an "independent" variable x and a "dependent" variable y. A relation between x and y was considered as one entity, not a combination of two mutually inverse mappings $x \to y(x)$ and $y \to x(y)$. Thus the curve was not seen as a graph of a function $x \to y(x)$, but as a figure embodying the relation between x and y.

Variables are not functions, because the concept of variable does not imply dependence on another, specially indicated "independent" variable.

I shall use the absence of the concept of function to explain several aspects of tile early differential calculus, such as, for instance, the lack of the concept of *derivative*. A derivative [function] presupposes the prior concept of function and hence could not play a fundamental role in the early calculus.

1.5. The variables of geometric analysis referred to geometric quantities, which were not real numbers. For geometric quantity, or quantity in general, as conceived by mathematicians up to the seventeenth century, lacks a multiplicative structure and a unit element. Quantities were conceived as having a dimension. Geometric quantities could have the dimension of a line (*e.g.* ordinate, arc length, subtangent), of an area (*e.g.* the area between curve and axis) or of a solid (*e.g.* the solid of revolution). Outside geometry there are the quantities of different dimensions such as velocity, corporeity (or mass), force, *etc.* Furthermore, the algebraic manipulation, especially with geometric quantities, led to dimensions higher than that of the solid. Although these quantities of higher dimension, like for instance powers like a^4 and b^5 of line segments a and b were felt to be not directly interpretable in space; they were accepted in analysis and their dimension was determined by the number of factors with the dimension of a line.

Only quantities of the same dimension could be added. In certain cases the multiplication of quantities was interpretable, as for instance in the case of two line segments, the product of which would be all area. But multiplication was never a closed operation; that is, the product of two quantities of equal dimension could not have the same dimension. Hence within the set of quantities of the same dimension there was no multiplicative structure and no unit element. A choice of a privileged element in the set of quantities of the same dimension (as a base for measuring, for instance, or as fundamental constant for certain curves or actually as unit element) was therefore always arbitrary; the structure of quantity itself did not offer such a privileged element.

Remark. Writing "$y(x)$" when y is a function of x in the classical sense looks like a further development of mixing up the meanings of "$f(x)$" and "f" by Camille Jordan and others.

References

[1] H. J. M. Bos. 'Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus.' In: *Archive for History of Exact Sciences* (1974), pp. 1–90. ISSN: 0003-9519. DOI: 10.1007/BF00327456. URL: https://link.springer.com/article/10.1007/BF00327456.

[2] Umberto Bottazini. *The higher calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass.* Translated from Italian. New York, NY: Springer, 24th Sept. 1986. viii+332. URL: https://link.springer.com/book/9780387963020.

[3] N. Bourbaki. *Fonctions d'une variable réelle. Théorie élémentaire.* French. Réimpression inchangée de l'édition originale de 1976. Berlin, Heidelberg: Springer, 18th Dec. 2006. x+314. DOI: 10.1007/978-3-540-34038-6. URL: https://link.springer.com/book/978-3-540-34038-6.

[4] N. Bourbaki. *Théorie des ensembles.* French. Réimpression inchangée de l'édition originale de 1970. Berlin, Heidelberg: Springer, 5th Sept. 2006. xv+337. DOI: 10.1007/978-3-540-34035-5. URL: https://link.springer.com/book/978-3-540-34035-5.

[5] Robert E. Bradley and C. Edward Sandifer. *Cauchy's Cours d'analyse. An annotated translation*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. New York, NY: Springer, 18th Aug. 2009. xx+411. DOI: 10.1007/978-1-4419-0549-9. URL: https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4419-0549-9.

[6] Florian Cajori. *Notations mainly in higher mathematics*. In: *A history of mathematical notations*. Vol. 2. Reprint of the 1929 original. New York, NY: Dover Publications, Inc., 1993.

[7] Constantin Carathéodory. *Calculus of variations and partial differential equations of the first order. Calculus of variations*. Translated from German. Holden-Day, Inc., San Francisco-London-Amsterdam, 1967. xvi+175-398.

[8] Constantin Carathéodory. *Calculus of variations and partial differential equations of the first order. Partial differential equations of the first order*. Translated from German. Holden-Day, Inc., San Francisco-London-Amsterdam, 1965. xvi+171.

[9] Constantin Carathéodory. *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*. German. Leipzig, Berlin: B. G. Teubner, 1935. xi+407.

[10] Augustin-Louis Cauchy. *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique. Première partie : Analyse algébrique*. French. Paris: Imprimerie Royale, Debure frères, 1821. xiv+576.

[11] Augustin-Louis Cauchy. *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique. Première partie : Analyse algébrique*. French. New York, NY: Cambridge University Press, 2009. xiv+576.

[12] Augustin-Louis Cauchy. 'Résumé des leçons données a l'École Royale Polytechnique. Suite du calcul infinitésimal'. French. In: *Équations différentielles ordinaires. Cours inédit. Fragment*. With an intro. by Christian Gilain. With a forew. by Jean Dieudonné. Paris and New York: Études Vivantes and Johnson Reprint Corporation, 1981, pp. 1–146. URL: https://archive.org/details/EquationsDifferentiellesOrdinaires.

[13] Augustin-Louis Cauchy. *Résumé des leçons données a l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal. Tome premier*. French. Paris: Imprimerie Royale, Debure frères, 1823. xii+160. URL: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62404287.

[14] Richard Courant. *Differential and integral calculus*. 2nd ed. Vol. 1. Wiley Classics Library. Translated from German. New York, NY: John Wiley & Sons, Inc., 1988. xiv+616.

[15] Richard Courant and Fritz John. *Introduction to calculus and analysis*. Vol. 1. Reprint of the 1965 edition. New York, NY: Springer-Verlag, 1989. xxiv+661.

[16] Lloyd Lyne Dines. 'The development of the function concept'. In: *School Science and Mathematics* 19.2 (Feb. 1919), pp. 99–110.

[17] Leonhard Euler. *Introduction to analysis of the infinite. Book I.* Translated from Latin. New York, NY: Springer, 21st Sept. 1988. xv+327. DOI: 10.1007/978-1-4612-1021-4. URL: https://link.springer.com/book/978-1-4612-1021-4.

[18] 'Foundations for a general theory of functions of a complex variable'. In: Inaugural dissertation, Göttingen 1851; second printing (unchanged), Göttingen 1867, pp. 1–41.

[19] Édouard Goursat. *Cours d'analyse mathématique.* Vol. 1: *Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développement en série. Applications géométriques.* French. 5th ed. Paris: Gauthier-Villars, 1933. 674 pp.

[20] Jacques Hadamard. *Leçons sur le calcul des variations.* Vol. 1: *La variation première et les conditions de premier ordre, les conditions de l'extremum libre.* Recueillies par M. Fréchet. French. Paris: Librairie scientifique A. Hermann et fils, 1910. viii+520.

[21] Carl Gustav Jacob Jacobi. 'De Determinantibus functionalibus'. Latin. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 22 (1841), pp. 319–359. DOI: 10.1515/crll.1841.22.319.

[22] Camille Jordan. *Cours d'analyse de l'École Polytechnique.* Vol. 1: *Calcul différentiel.* French. 3rd ed. Paris: Gauthier-Villars, 1909. xv+620.

[23] Joseph-Louis Lagrange. *Leçons sur le calcul des fonctions.* French. In: *Oeuvres de Lagrange.* Publiées par les soins de M. J.-A. Serret. Vol. 10. 3rd ed. Réimprimée d'après la deuxième édition de 1806. Paris: Gauthier-Villars, 1884, pp. 4–451.

[24] Joseph-Louis Lagrange. *Théorie des fonctions analytiques. Contenant les principes du calcul différentiel.* French. Paris: Imprimerie de la République, 1797. xiii+277.

[25] Joseph-Louis Lagrange. *Théorie des fonctions analytiques. Contenant les principes du calcul différentiel.* French. In: *Oeuvres de Lagrange.* Publiées par les soins de M. J.-A. Serret. Vol. 9. 4th ed. Réimprimée d'après la deuxième édition de 1813. Paris: Gauthier-Villars, 1881, pp. 12–413.

[26] Joseph-Louis Lagrange. *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés. Avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques.* French. In: *Oeuvres de Lagrange.* Publiées par les soins de M. J.-A. Serret. Vol. 8. 4th ed. Réimprimée d'après la deuxième édition de 1808. Paris: Gauthier-Villars, 1879, pp. 11–367.

[27] Gottfried Wilhelm Leibniz. 'Considerations sur la différence qu'il y a entre l'Analyse ordinaire, et le nouveau calcul des transcendantes'. French. In: *Journal des Sçavans* (1694), pp. 404–406. URL: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k56541d/f434.item.

[28] Gottfried Wilhelm Leibniz. 'De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata easque omnes tangente. Ac de novo in ea re analyseos infinitorum usu'. Latin. In: *Acta Eruditorum* (Apr. 1692), pp. 168–171.

[29] Gottfried Wilhelm Leibniz. 'Nova calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem ex data tangentium conditione'. Latin. In: *Acta Eruditorum* (July 1694), pp. 311–316.

[30] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet. *G. Lejeune Dirichlet's Werke*. Vol. 1. German. Ed. by Leopold Kronecker. 2 vols. Berlin: Druck und Verlag von Georg Reimer, 1889. x+644. URL: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99435r.

[31] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet. *G. Lejeune Dirichlet's Werke*. Vol. 1. German. Ed. by Leopold Kronecker. 2 vols. Cambridge University Press, 2012. x+644. DOI: 10.1017/CBO9781139237338.

[32] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet. 'Ueber die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen'. German. In: *Repertorium der Physik* 1 (1837), pp. 152–175. URL: https://doi.org/10.3931/e-rara-55569.

[33] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics 5. New York, NY: Springer, 25th Sept. 1998. xii+318. DOI: 10.1007/978-1-4757-4721-8. URL: https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4757-4721-8.

[34] Karl Menger. *Calculus. A modern approach*. New edition. Boston: Ginn and Company, 1955. xviii+354.

[35] Dieter Rüthing. 'Some definitions of the concept of function from Joh. Bernoulli to N. Bourbaki'. In: *The Mathematical Intelligencer* 6.4 (1984), pp. 72–77. ISSN: 0343-6993,1866-7414. URL: https://link.springer.com/article/10.1007/BF03026743.