Analyse 1

Alexey Muranov

7 avril 2024

Table des matières

I. Nombres réels

I.1. Qu'est-ce que c'est, un nombre réel ?

Exercice. Déterminer s'il existe un nombre rationnel x tel que $x^2 = 2$.

Question. Quelle est la distance entre deux sommets opposés d'un carré de côté 1 mètre ?

Définition. Définissons les nombres *réels* ainsi :

(1) Tout nombre rationnel est *réel*.

(2) Si l'ensemble des nombres rationnels $\mathbf{Q}$ est partagé en deux parties non vides A et B de manière que[1] pour tous $p \in A$ et $q \in B$, on a $p < q$, alors il existe un unique nombre *réel* x tel que pour tout $p \in A$ et pour tout $q \in B$, on a $p \leqslant x \leqslant q$.

(3) Pour tout nombre *réel* x, il existe deux nombres entiers a et b tels que $a < x < b$.

Il est sous-entendu dans cette définition que les relations d'ordre $(<)$ et $(\leqslant)$ pour les nombres réels satisfont quelques propriétés « usuelles » :

(1) si $x < y$ et $y < z$, alors $x < z$,

(2) si $x < y$, alors $x \neq y$,

(3) si $x \neq y$, alors $x < y$ ou $y < x$,

(4) $x \leqslant y$ si et seulement si $x < y$ ou $x = y$.

Notation. L'ensemble des nombres réels sera noté « $\mathbf{R}$ ».

Exercice. Prouver qu'il existe un unique nombre réel $x > 0$ tel que pour tous nombres rationnels p et q tels que $0 < p < x < q$, on a que $p^2 < 2 < q^2$.

Rappelons nous que les nombres naturels sont entiers, que les entiers sont rationnels, et que les rationnels sont réels. Ainsi, lorsqu'on parle des nombres réels, cela inclue les naturels, les entiers, et les rationnels.

Certaines notions introduites pour la première fois dans le cadre de l'étude des nombres réels pourraient être introduites déjà pour les nombres naturels, ou pour les entiers, ou pour les rationnels.

[1] Une telle partition de $\mathbf{Q}$ s'appelle une *coupure de Dedekind*.

I.2. Relations d'ordre usuelles

D'après la définition des nombres réels, les relations $(\leqslant)$, $(\geqslant)$, $(<)$, $(>)$ sont définies sur l'ensemble des nombres réels et satisfont quelques propriétés « usuelles », dont les suivantes pour $(\leqslant)$:

(1) si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$,

(2) $x \leqslant x$,

(3) si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, alors $x = y$,

(4) $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

Exercice. Soient X et Y deux ensembles non vides de nombres réels tels que pour tout $x \in X$ et pour tout $y \in Y$, on a que $x \leqslant y$. Soit A l'ensemble des nombres rationnels r tels que pour tout $y \in Y$, on a $r \leqslant y$. Soit B l'ensemble des nombres rationnels qui ne sont pas dans A.

(1) Montrer que A n'est pas vide. Montrer que B n'est pas vide.

(2) Soit z le nombre réel tel que pour tous $p \in A$ et $q \in B$, on a $p \leqslant z \leqslant q$. Montrer que pour tous $x \in X$ et $y \in Y$, on a que $x \leqslant z \leqslant y$.

Définition. Soient x, y, z trois nombre réels.

(1) On va dire que y est *entre* x et z (au sens large) si et seulement si $x \leqslant y \leqslant z$ ou $x \geqslant y \geqslant z$.

(2) On va dire que y est *strictement entre* x et z si et seulement si $x < y < z$ ou $x > y > z$.

Les deux lemmes suivants peuvent être utiles pour démontrer l'unicité ou l'existence d'un nombre réel « positionné » par rapport à d'autres nombres, rationnels ou réels.

Lemme. *Si x et y sont deux nombres réels tels que $x < y$, alors il existe un nombre rationnel r tel que $x < r < y$.*

Démonstration. Soient x et y deux nombres réels tels que $x < y$. Soit A l'ensemble des nombres rationnels r tels que $r \leqslant x$. Soit B l'ensemble des nombres rationnels r tels que $y \leqslant r$. Alors :

(1) A et B sont non vides, d'après la partie (3) de la définition des nombres réels,

(2) pour tout $p \in A$ et pour tout $q \in B$, on a que $p < q$.

Supposons qu'il n'y a aucun nombre rationnel qui soit strictement entre x et y. Alors tout nombre rationnel est soit dans A, soit dans B. D'où, d'après la partie (2) de la définition des nombres réels, il existe un *unique* nombre réel z tel que pour tous $p \in A$ et $q \in B$, on a que $p \leqslant z \leqslant q$. Cela contredit le fait que pour tous $p \in A$ et $q \in B$, on a que $p \leqslant x < y \leqslant q$. Cette contradiction signifie qu'il existe un nombre rationnel qui est strictement entre x et y. $\square$

Lemme. *Soient X et Z deux ensembles non vides de nombres réels tels que pour tout $x \in X$ et pour tout $z \in Z$, on a que $x \leqslant z$. Alors il existe un nombre réel y tel que pour tous $x \in X$ et $z \in Z$, on a que $x \leqslant y \leqslant z$. En plus, parmi tous les nombres réels y tels que pour tous $x \in X$ et $z \in Z$, on a que $x \leqslant y \leqslant z$, il y en a un que est le plus grand, et un qui est le plus petit.*

Exercice. Prouver ce lemme.

Notation. Si x et y sont deux nombres réels, on va noter « $\max(x, y)$ » le plus grand entre x et y et « $\min(x, y)$ » le plus petit entre x et y :

$$\max(x,y) \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant y, \\ y & \text{si} \quad x \leqslant y; \end{cases} \qquad \min(x,y) \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leqslant y, \\ y & \text{si} \quad x \geqslant y. \end{cases}$$

Réels positifs et négatifs

Définition. Un nombre réel x est dit :

(1) *positif* (au sens large) si et seulement si $x \geqslant 0$,

(2) *négatif* (au sens large) si et seulement si $x \leqslant 0$,

(3) *strictement positif* si et seulement si $x > 0$,

(4) *strictement négatif* si et seulement si $x < 0$.

I.3. Minimum et maximum

Définition. Soit X un ensemble de nombres réels.

(1) Un élément $x \in X$ est dit *minimal* dans X, ou un *minimum* de X, si et seulement si dans X il n'y a pas d'élément strictement plus petit que x.

(2) Un élément $x \in X$ est dit *maximal* dans X, ou un *maximum* de X, si et seulement si dans X il n'y a pas d'élément strictement plus grand que x.

Autrement dit, le minimum d'un ensemble de réels et le plus petit élément de cet ensemble, et le maximum en est le plus grand.[2]

Notation. Si X est un ensemble des nombres réels, on va noter « $\min X$ » le plus petit élément de X, s'il y en a, et on va noter « $\max X$ » le plus grand élément de X, s'il y en a.

Exemple. Si X est l'ensemble des nombres réels x tels que $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $\min X = 0$ et $\max X = 1$. Si X est l'ensemble des nombres réels x tels que $0 < x < 1$, alors les valeurs des expressions « $\min X$ » et « $\max X$ » ne sont pas définies.

[2] Cependant, dans certains *ensembles partiellement ordonnés*, *minimal* ne veut pas dire *le plus petit*, et *maximal* ne veut pas dire *le plus grand*.

I.4. Minorants et majorants, infimum et supremum

Définition. Soit X un ensemble de nombres réels.

(1) Un nombre réel y est dite un *minorant* de X si et seulement si pour tout $x \in X$, on a que $x \geqslant y$; dans ce cas on dit aussi que X est *minoré* par y.

(2) Un nombre réel y est dite un *majorant* de X si et seulement si pour tout $x \in X$, on a que $x \leqslant y$; dans ce cas on dit aussi que X est *majoré* par y.

Exemples. (1) L'ensemble des nombres entiers n'est minoré par aucun nombre entier ou réel. Il n'est pas majoré non plus.

(2) L'ensemble des nombres rationnel q tels que $q^2 \leqslant 2$ est minoré par -10 et majoré par 10.

Exercice. Soient X un ensemble de nombres réels, A l'ensemble des minorants rationnels de X, et B l'ensemble des non minorants rationnels de X. Supposons que A et B ne soient pas vides. Soit y l'unique nombre réel tel que pour tous $p \in A$ et $q \in B$, on a $p \leqslant y \leqslant q$.

(1) Montrer que y est un minorant de X.

(2) Montrer que y est le plus grand minorant de X.

Théorème. *Soit X un ensemble non vide de réels.*

(1) *Si X est minoré par un nombre réel, alors parmi les minorants réels de X il en existe un le plus grand.*

(2) *Si X est majoré par un nombre réel, alors parmi les majorants réels de X il en existe un le plus petit.*

Exercice. Prouver ce théorème.

On peut se poser la question si un théorème analogique existe pour les nombres rationnels. Comme le montre l'exemple suivant, il existe des ensembles de nombres rationnels qui sont majorés et minorés par des nombres rationnels, mais pour lesquels il n'y a pas du plus petit majorant *rationnel*, ni du plus grand minorant *rationnel*.

Exemple. Soit A l'ensemble des nombres rationnels q tels que $q^2 \leqslant 2$. Alors A est majoré par 2 et minoré par -2. Or, parmi les majorants *rationnels* de A il n'y a pas du plus petit, et parmi les minorants *rationnels* de A il n'y a pas du plus grand.

Définition. Soit X un ensemble de réels. Le plus grand minorant réel de X, s'il existe, est dit la *borne inférieure* de X, ou l'*infimum* de X, et est noté « $\inf X$ ». Le plus petit majorant réel de X, s'il existe, est dit la *borne supérieure* de X, ou le *supremum* de X, et est noté « $\sup X$ ».

Exemple. Soit A l'ensemble des nombres rationnels q tels que $0 < q < 1$. Alors $\inf A = 0$ et $\sup A = 1$.

Observons que si un ensemble X de réels possède un élément minimal, alors $\inf X = \min X$, et que s'il possède un élément maximal, alors $\sup X = \max X$.

I.5. Intervalles

Notation. Si x et y sont deux nombres réels, alors on va noter :

(1) « $[x, y]$ » l'ensemble des réels z tels que $x \leqslant z \leqslant y$,

(2) « $[x, y[$ » l'ensemble des réels z tels que $x \leqslant z < y$,

(3) « $]x, y]$ » l'ensemble des réels z tels que $x < z \leqslant y$,

(4) « $]x, y[$ » l'ensemble des réels z tels que $x < z < y$.

Si x est un nombre réel, alors on va noter :

(5) « $[x, \infty[$ » l'ensemble des réels y tels que $x \leqslant y$,

(6) « $]x, \infty[$ » l'ensemble des réels y tels que $x < y$,

(7) « $]-\infty, x]$ » l'ensemble des réels y tels que $y \leqslant x$,

(8) « $]-\infty, x[$ » l'ensemble des réels y tels que $y < x$.

On va aussi se servir de la notation suivante :

(9) « $]-\infty, \infty[$ » dénote l'ensemble des réel : $]-\infty, \infty[\stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{R}$.

Théorème. *Soit I un ensemble non vide de nombres réels tel que pour tous $x, y, z \in \mathbf{R}$ tels que $x < y < z$ et $x, z \in I$, on a que $y \in I$.*

(1) *Si I est minoré et majoré par des nombres réels, alors I coïncide avec un des quatre ensembles suivants* : $[\inf I, \sup I]$, $[\inf I, \sup I[$, $]\inf I, \sup I]$, $]\inf I, \sup I[$.

(2) *Si I est minoré par un nombre réel mais n'est majoré par aucun nombre réel, alors I coïncide avec un des deux ensembles suivants* : $[\inf I, \infty[$, $]\inf I, \infty[$.

(3) *Si I est majoré par un nombre réel mais n'est minoré par aucun nombre réel, alors I coïncide avec un des deux ensembles suivants* : $]-\infty, \sup I]$, $]-\infty, \sup I[$.

(4) *Si I n'est minoré, ni majoré, par aucun nombre réel, alors $I = \mathbf{R} =]-\infty, \infty[$.*

Exercice. Prouver ce théorème.

Définition. Les ensembles non vides de réels qui sont d'une des formes $[x, y]$, $[x, y[$, $]x, y]$, $]x, y[$, $[x, \infty[$, $]x, \infty[$, $]-\infty, x]$, $]-\infty, x[$ ou $]-\infty, \infty[$ sont dits *intervalles*. Les intervalles des formes $[x, y]$, $[x, y[$ et $[x, \infty[$ sont dits *fermés à gauche*. Les intervalles des formes $]x, y]$, $]x, y[$ et $]x, \infty[$ sont dits *ouverts à gauche*. Les intervalles des formes $[x, y]$, $]x, y]$ et $]-\infty, x]$ sont dits *fermés à droite*. Les intervalles des formes $[x, y[$, $]x, y[$ et $]-\infty, x[$ sont dits *ouverts à droite*.

I.6. Addition et soustraction

Définition. Si x et y sont deux nombres réels, alors leur *somme*, notée « $x + y$ », est définie par les deux conditions :

(1) pour tous nombres rationnels p et q tels que $p \leqslant x$ et $q \leqslant y$, on a que $p + q \leqslant x + y$,

(2) pour tous nombres rationnels p et q tels que $x \leqslant p$ et $y \leqslant q$, on a que $x + y \leqslant p + q$.

Exercice. Vérifier si cette définition est correcte.

Ainsi on a défini l'opération d'*addition* (+) qui à deux n'importe quels nombres réels associe leur somme.

Exercice. Soit A l'ensemble des nombres rationnels q tels que $q^2 < 2$. Posons $x = \inf A$ et $y = \sup A$. Montrer que $x + y = 0$.

Les trois identités suivantes satisfaites par l'opération d'addition de nombres réels sont les mêmes que pour l'opération d'addition de nombres entiers :

(1) $x + (y + z) = (x + y) + z$,

(2) $x + 0 = x = 0 + x$,

(3) $y + x = x + y$.

Exercice. Démontrer ces identités.

Lemme. *Soit x un nombre réel arbitraire. Soit A l'ensemble des nombres rationnels r tels que $x + r \leqslant 0$. Soit B l'ensemble des nombres rationnels r tels que $x + r > 0$. Alors*

(1) *pour tous $p \in A$ et $q \in B$, on a que $p < q$,*

(2) *tout nombre rationnel appartient soit à A, soit à B,*

(3) *A et B ne sont pas vides.*

Soit y le nombre réel tel que pour tous $p \in A$ et $q \in B$, on a $p \leqslant y \leqslant q$. Alors $x + y = 0 = y + x$.

Exercice. Prouver ce lemme.

Proposition. *Pour tous nombres réels x et y, il existe un unique nombre réel z tel que $z + y = x$.*

Exercice. Prouver cette proposition.

Définition. Deux nombres réels x et y sont dits *opposés* l'un de l'autre si et seulement si $x + y = 0$.

Définition. Si x et y sont deux nombres réels, alors l'unique nombre réel z tel que $z + x = y$ est dit la *différence* de y et x et est noté « $y - x$ ».

Autrement dit,

$$y - x = z \quad \Leftrightarrow \quad y = z + x.$$

Ainsi on a défini l'opération de *soustraction* $(-)$ qui à deux n'importe quels nombres réels associe leur différence.

L'opération de soustraction $(-)$ de nombres réels peut aussi être définie par les deux identités suivantes, à la condition que l'opération d'addition $(+)$ est déjà définie :

(1) $(x + y) - y = x$, (2) $(x - y) + y = x$.

En fait, n'importe quelle de ces deux identités suffit toute seule pour définir l'opération de soustraction de nombres réels.

Exercice. Montrer que n'importe quelle de ces deux identités suffit toute seule pour définir l'opération de soustraction de nombres réels.

Les identités suivantes satisfaites pour tous x, y, z réels sont les même que pour les nombres entiers :

(1) $x + (y - z) = (x + y) - z$,

(2) $x - (y + z) = (x - z) - y$,

(3) $x - (y - z) = (x + z) - y$,

(4) $(x - y) + (y - z) = x - z$,

(5) $(x + z) - (y + z) = x - y$,

(6) $(x - y) + z = (x + z) - y$,

(7) $(x - y) - z = (x - z) - y$,

(8) $x - (x - y) = y$,

(9) $x - 0 = x$,

(10) $x - x = 0$.

Exercice. Démontrer ces identités.

Notation. L'expression « $+x$ » veut dire $0 + x = x$. L'expression « $-x$ » veut dire $0 - x$.

Rapport aux relations d'ordre usuelles

Proposition. *Pour tous nombres réels x, y, z, si $x < y$, alors $x + z < y + z$.*

Exercice. Prouver cette proposition.

Corollaire. *Pour tous nombres réels x, y, z, les équivalences suivantes sont satisfaites :*

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad x + z < y + z, \qquad x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad x + z \leqslant y + z.$$

Proposition. *Pour tous nombres réels x, y, z, si $x < y$, alors $z - x > z - y$.*

Exercice. Prouver cette proposition.

Corollaire. *Pour tous nombres réels x, y, z, les équivalences suivantes sont satisfaites :*

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad z - x > z - y, \qquad x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad z - x \geqslant z - y.$$

I.7. Multiplication et division

Définition. Si n est un nombre naturel et x est un nombre réel, alors le *produit* de x et n, noté « $x \times n$ », « $x \cdot n$ », ou « xn », est défini par la règle :

$$xn \overset{\text{déf}}{=} 0 \underbrace{+ x + x + \cdots + x}_{n \text{ fois}}.$$

Définition. Si m et n sont deux nombres naturels, x est un nombre réel, et $a = n - m$, alors le *produit* de x et a, noté « $x \times a$ », « $x \cdot a$ », ou « xa », est défini par la règle :

$$x(n - m) \overset{\text{déf}}{=} 0 \underbrace{+ x + x + \cdots + x}_{n \text{ fois}} \underbrace{- x - x - \cdots - x}_{m \text{ fois}} = xn - xm.$$

Lemme. *Pour tout nombre réel x et pour tout entier a non nul, il existe un unique nombre réel y tel que $ya = x$.*

Exercice. Prouver ce lemme.

Définition. Si a est un entier non nul et x est un nombre réel, alors l'unique nombre réel y tel que $ya = x$ est dit le *quotient* de x par a et est noté « $x \div a$ », ou « $x : a$ », ou « x/a », ou « $a\backslash x$ », ou « $\dfrac{x}{a}$ ».

Définition. Si a est un entier non nul, b est un entier, x est un nombre réel, et $q = b/a$, alors le *produit* de x et q, noté « $x \times q$ », « $x \cdot q$ », ou « xq », est défini par la règle :

$$x \cdot \frac{b}{a} \overset{\text{déf}}{=} \frac{xb}{a} = \frac{x}{a} \cdot b.$$

Définition. Si x et y sont deux nombres réels, alors leur *produit*, noté « $x \times y$ », « $x \cdot y$ », ou « xy », est défini par la condition :

> pour tous nombres rationnels p et q tels que y est entre p et q, on a que xy est entre xp et xq (au sens large).

Exercice. Vérifier si ces définitions sont toutes correctes.

Ainsi on a défini l'opération de *multiplication* $(\cdot)$ (aussi notée « $(\times)$ ») qui à deux n'importe quels nombres réels associe leur produit.

Remarque. Le produit de nombres réels *strictement positifs* x et y pourrait être défini par les conditions :

(1) pour tous nombres rationnels p et q tels que $0 < p \leqslant x$ et $0 < q \leqslant y$, on a que $pq \leqslant xy$,

(2) pour tous nombres rationnels p et q tels que $x \leqslant p$ et $y \leqslant q$, on a que $xy \leqslant pq$.

Proposition. *Pour tous nombres réels x et y, $yx = xy$.*

Exercice. Prouver cette proposition.

Les identités suivantes sont satisfaites :

(1) $x(yz) = (xy)z$,

(2) $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$,

(3) $yx = xy$,

(4) $x(y + z) = xy + xz$,

(5) $x(y - z) = xy - xz$,

(6) $x \cdot 0 = 0$.

Exercice. Démontrer ces identités.

Lemme. *Soit x un nombre réel strictement positif. Soit A l'ensemble des nombres rationnels strictement positifs r tels que $xr \leqslant 1$. Soit B l'ensemble des nombres rationnels strictement positifs r tels que $xr > 1$. Alors*

(1) *pour tous $p \in A$ et $q \in B$, on a que $p < q$,*

(2) *tout nombre rationnel strictement positif appartient soit à A, soit à B,*

(3) *A et B ne sont pas vides.*

Soit y le nombre réel tel que pour tous $p \in A$ et $q \in B$, on a $p \leqslant y \leqslant q$. Alors $xy = 1 = yx$.

Exercice. Prouver ce lemme.

Proposition. *Pour tous nombres réels x et y avec $y \neq 0$, il existe un unique nombre réel z tel que $zy = x$.*

Exercice. Prouver cette proposition.

Corollaire. *Si x et y sont nombres réels tels que $x \neq 0$ et $y \neq 0$, alors $xy \neq 0$.*

Définition. Deux nombres réels x et y sont dits *réciproques* l'un de l'autre si et seulement si $xy = 1$.

Définition. Si x est un nombre réel non nul et y est un nombre réel, alors l'unique nombre réel z tel que $zx = y$ est dit le *quotient* de y par x et est noté « $y \div x$ », ou « $y : x$ », ou « y/x », ou « $x\backslash y$ », ou « $\dfrac{y}{x}$ ».

Autrement dit,

$$\frac{y}{x} = z \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = zx \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Ainsi on a défini l'opération de *division* ($/$) qui à n'importe quels deux nombres réels, dont le deuxième n'est pas zéro, associe leur quotient.

L'opération de division ($/$) de réels peut aussi être définie par les trois propriétés suivantes, à la condition que l'opération de multiplication ($\cdot$) est déjà définie :

(1) $(xy)/y = x$ si $y \neq 0$,

(2) $(x/y)y = x$ si $y \neq 0$,

(3) la valeur de « x/y » n'est pas définie si $y = 0$.

En fait, la deuxième propriété résulte de la première, et la première résulte de la deuxième, donc il suffit de garder une seule parmi les deux.

Exercice. Montrer que la deuxième propriété résulte de la première, et que la première résulte de la deuxième.

Voici quelques identités remarquables satisfaites par l'opération de division des nombres réels *à la condition que les valeurs de tous les quotients soient définies* (que les dénominateurs ne soient pas 0) :

(1) $x(y/z) = (xy)/z$,

(2) $x/(yz) = (x/z)/y$,

(3) $x/(y/z) = (xz)/y$,

(4) $(x/y)(y/z) = x/z$,

(5) $(xz)/(yz) = x/y$,

(6) $(x/y)z = (xz)/y$,

(7) $(x/y)/z = (x/z)/y$,

(8) $x/(x/y) = y$,

(9) $x/1 = x$,

(10) $x/x = 1$,

(11) $(x+y)/z = x/z+y/z$,

(12) $(x-y)/z = x/z-y/z$,

(13) $0/x = 0$.

Exercice. Démontrer ces identités.

Rapport aux relations d'ordre usuelles

Proposition. *Pour tous nombres réels x, y, z,*

(1) *si $x < y$ et $z > 0$, alors $xz < yz$,*

(2) *si $x < y$ et $z < 0$, alors $xz > yz$.*

Exercice. Prouver cette proposition.

Corollaire. *Pour tous nombres réels x, y, z,*

(1) *si $z > 0$, alors les équivalences suivantes sont satisfaites :*

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad xz < yz, \qquad\qquad x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad xz \leqslant yz,$$

(2) *si $z < 0$, alors les équivalences suivantes sont satisfaites :*

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad xz > yz, \qquad\qquad x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad xz \geqslant yz.$$

Corollaire. *Pour tous nombres réels x et y,*

(1) *si $x > 0$ et $y > 0$, alors $xy > 0$,*

(2) *si $x > 0$ et $y < 0$, alors $xy < 0$,*

(3) *si $x < 0$ et $y > 0$, alors $xy < 0$,*

(4) *si $x < 0$ et $y < 0$, alors $xy > 0$.*

Corollaire. *Pour tout nombre réel x, $xx \geqslant 0$.*

Proposition. *Pour tous nombres réels* strictement positifs x, y, z, *si* $x < y$, *alors* $z/x > z/y$.

Exercice. Prouver cette proposition.

Corollaire. *Pour tous nombres réels* strictement positifs x, y, z, *les équivalences suivantes sont satisfaites* :

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad z/x > z/y, \qquad\qquad x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad z/x \geqslant z/y.$$

I.8. Approche axiomatique

Au lieu de d'abord *construire* les nombres réels à partir des nombres rationnels (ou à partir d'autres objets mathématiques) et puis établir toutes leurs propriétés, on peut se contenter d'admettre que l'ensemble des nombres réels existe et est muni de quelques opérations et relations qui satisfont quelques propriétés de base. Telles propriétés de base qu'on admet sans demonstration sont dites *axiomes*.

La structure de l'ensemble des nombres réels muni de ses opérations et de ses relations peut être décrite par les 17 axiomes présentés ci-dessous.

La série suivante de 10 axiomes affirme que l'ensemble des nombres réels, muni de ses opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division, ainsi que des éléments distingués 0 et 1, est ce qui s'appelle un *corps commutatif* :

(1) $x+(y+z) = (x+y)+z$,

(2) $x + 0 = x = 0 + x$,

(3) $y + x = x + y$,

(4) $(x - y) + y = x$,

(5) $x(yz) = (xy)z$,

(6) $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$,

(7) $yx = xy$,

(8) $(x/y)y = x$ si $y \neq 0$,

(9) $x(y + z) = xy + xz$,

(10) $1 \neq 0$.

Les axiomes dans cette liste sont présentées sous forme abrégée. Par exemple, le premier, écrit comme « $y+x = x+y$ », veut dire : « pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, on a : $y+x = x+y$ ». Dans ce qui suit, on va continuer à utiliser une telle écriture abrégée.

La série suivante de 4 axiomes affirme que l'ensemble des nombres réels, muni de la relation ($\leqslant$), est ce qui s'appelle un *ensemble totalement ordonné* :

(11) si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$,

(12) $x \leqslant x$,

(13) si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, alors $x = y$,

(14) $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

En ajoutant aux 14 axiomes précédents les 2 suivants, on affirme que les nombres réels forment ce qui s'appelle un *corps ordonné* :

(15) si $x \leqslant y$, alors $x + z \leqslant y + z$,

(16) si $0 \leqslant x$ et $0 \leqslant y$, alors $0 \leqslant xy$.

Les 16 axiomes précédents sont satisfaits par le corps ordonné des nombres réels, mais aussi per le corps ordonné des nombres rationnels et par beaucoup d'autres. Le dernier axiome distingue le corps ordonné des nombres réels :

(17) tout ensemble non vide de nombres réels majoré par un nombre réel admet le supremum réel (le plus petit majorant réel).

Comme on pourrais l'imaginer, celui-ci peut être remplacé par le suivant :

(17) tout ensemble non vide de nombres réels minoré par un nombre réel admet l'infimum réel (le plus grand minorant réel).

(Les deux sont équivalents tant qu'on admet les 16 précédents.)

I.9. Valeur absolue

Définition. La *valeur absolue* d'un nombre réel x, notée « $|x|$ », est définie ainsi :

$$|x| \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} +x & \text{si} \quad x \geqslant 0, \\ -x & \text{si} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

En utilisant la notation avec « max », on peut définir la valeur absolue d'un nombre réel x par la formule :

$$|x| = \max(x, -x).$$

Une autre façon (équivalente) de définir la valeur absolue d'un nombre réel x est par l'équivalence suivante :

$$|x| = y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} xx = yy \\ y \geqslant 0 \end{cases}.$$

Exercice. Montrer que la valeur absolue peut être définie par cette équivalence.

Lemme. *Pour tous nombres réels x et y,*

$$|x| \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad -y \leqslant x \leqslant y \qquad \text{et} \qquad |x| < y \quad \Leftrightarrow \quad -y < x < y.$$

Démonstration.

$$|x| \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad \max(x, -x) \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leqslant y \\ -x \leqslant y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leqslant y \\ -y \leqslant x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -y \leqslant x \leqslant y,$$

$$|x| < y \quad \Leftrightarrow \quad \max(x, -x) < y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x < y \\ -x < y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x < y \\ -y < x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -y < x < y. \qquad \square$$

Proposition (Inégalité triangulaire)**.** *Pour tous nombres réels x et y,*

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

Démonstration. Comme $|x| \leqslant |x|$ et $|y| \leqslant |y|$, d'après le lemme précédent on a :

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x| \quad \text{et} \quad -|y| \leqslant y \leqslant |y|.$$

D'où,

$$-(|x|+|y|) \leqslant x+y \leqslant |x|+|y|,$$

et donc, encore d'après le lemme précédent,

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|. \qquad \square$$

L'origine du nom « *inégalité triangulaire* » sera peut-être plus claire si l'on traduit cette inégalité sous la forme suivante :

$$|c-a| \leqslant |b-a| + |c-b|.$$

Proposition. *Pour tous nombres réels x et y,*

$$|xy| = |x|\,|y|.$$

Exercice. Prouver cette proposition.

Corollaire. *Pour tous nombres réels x et $y \neq 0$,*

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Exercice. Prouver ce corollaire.

I.10. Exponentiation, puissances, racines

Définition. Si n est un nombre naturel et x est un nombre réel, alors x *puissance* n, ou la n-ième *puissance* de x, ou x *élevé à la n-ième puissance*, est le nombre noté « x^n » et défini par la règle :

$$x^n \stackrel{\text{déf}}{=} 1 \underbrace{\cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ fois}}.$$

Par exemple : $x^0 = 1$, $x^1 = x$, $x^2 = xx$, $x^3 = xxx$.

Remarque. Il n'y a pas de consensus général sur le sens de « 0^0 ». D'après la définition donnée ici, $0^0 = 1$. Cependant, parfois on décide que l'expression « 0^0 » n'ait pas de sens ou que sa valeur ne soit pas définie (comme pour « $0/0$ »).

Définition. Si m et n sont deux nombres naturels, x est un nombre réel non nul, et $a = n - m$, alors x *puissance* a est le nombre noté « x^a » et défini par la règle :

$$x^{n-m} \stackrel{\text{déf}}{=} 1 \underbrace{\cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ fois}} \underbrace{/x/x/\cdots/x}_{m \text{ fois}} = \frac{x^n}{x^m}.$$

Voici quelques identités remarquables pour a et b entiers et pour x et y réels *non nuls* :

(1) $x^{ab} = (x^a)^b$,	(3) $x^{a+b} = x^a x^b$,	(6) $(xy)^a = x^a y^a$,
(2) $x^1 = x$,	(4) $x^{a-b} = x^a / x^b$,	(7) $(x/y)^a = x^a / y^a$,
	(5) $x^0 = 1$,	(8) $1^a = 1$.

Définition. Si n est un nombre naturel non nul, une *racine n-ième* d'un nombre x est un nombre y tel que $y^n = x$. Une racine deuxième est aussi dite *racine carrée*, et une racine troisième est aussi dite *racine cubique*.

Proposition. (1) *Si n est un nombre naturel non nul, alors tout nombre réel positif admet une unique racine n-ième positive.*

(2) *Si n est un nombre naturel impair, alors tout nombre réel admet une unique racine n-ième réelle.*

Exercice. Prouver cette proposition.

Définition. Soient n un nombre naturel impair et x un nombre réel. Alors ***la*** racine n-ième de x est l'unique racine n-ième réelle de x.

Définition. Soient n un nombre naturel non nul et x un nombre réel positif ($x \geqslant 0$). Alors ***la*** racine n-ième de x est l'unique racine n-ième positive de x. Si x est strictement positif ($x > 0$), alors la racine n-ième positive de x est aussi dite la racine n-ième *principale* de x.

Notation. Si n est un nombre naturel non nul et x est un nombre réel qui admet une racine n-ième réelle, alors on note « $\sqrt[n]{x}$ » ou « $\sqrt[n]{x}$ » l'unique racine n-ième réelle de x si n et impair, et on note « $\sqrt[n]{x}$ » ou « $\sqrt[n]{x}$ » l'unique racine n-ième positive de x si n est pair. Si n est pair et x est strictement négatif, alors la valeur de l'expression « $\sqrt[n]{x}$ » n'est pas définie (l'expression « $\sqrt[n]{x}$ » n'a pas de sens). Dans le cas où $n = 2$, on utilise aussi la notation « $\sqrt{x}$ » au lieu de « $\sqrt[2]{x}$ ».

Ainsi, si n est un nombre naturel *impair*, alors pour tous x et y réels,

$$\sqrt[n]{x} = y \quad \Leftrightarrow \quad x = y^n,$$

et si n est un nombre naturel non nul *pair*, alors pour tous x et y réels,

$$\sqrt[n]{x} = y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = y^n \\ y \geqslant 0 \end{cases}.$$

Pour n naturel *impair*, l'opération $\sqrt[n]{\ }$ sur les nombres réels peut aussi être définie par les deux identités suivantes :

(1) $\sqrt[n]{x^n} = x$, (2) $(\sqrt[n]{x})^n = x$.

En fait, n'importe quelle de ces deux identités suffit toute seule pour définir l'opération $\sqrt[n]{\ }$ sur les nombres réels (pour n impair).

Pour n naturel non nul *pair*, l'opération $\sqrt[n]{\ }$ sur les nombres réels peut aussi être définie par les trois propriétés suivantes :

(1) $\sqrt[n]{x^n} = x$ si $x \geqslant 0$,

(2) $(\sqrt[n]{x})^n = x$ si $x \geqslant 0$,

(3) la valeur de « $\sqrt[n]{x}$ » n'est définie que si $x \geqslant 0$.

En fait, la deuxième propriété résulte de la première, et la première résulte de la deuxième, donc il suffit de garder une seule parmi les deux.

Voici quelques identités remarquables pour m et n naturels non nuls, a entier, et x et y réels, qui sont satisfaites *à la condition que les valeurs des deux membres* (des parties gauche et droite) *soient définies* :

(1) $\sqrt[n]{x^a} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^a$,

(2) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$,

(3) $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$,

(4) $\sqrt[n]{x/y} = \sqrt[n]{x}/\sqrt[n]{y}$,

(5) $\sqrt[n]{1} = 1$, $\sqrt[n]{0} = 0$.

Exercice. Démontrer ces identités.

Observons que $\sqrt{(-1)(-1)} = 1$, alors que la valeur de l'expression « $\sqrt{-1}\sqrt{-1}$ » n'est pas définie (car déjà l'expression « $\sqrt{-1}$ » n'a pas de valeur définie).

Définition. Si n est un nombre naturel non nul, a est un entier, x est un nombre réel strictement positif, et $q = \dfrac{a}{n}$, alors x *puissance* q est le nombre noté « x^q » et défini par la règle :

$$x^{a/n} \overset{\text{déf}}{=} \sqrt[n]{x^a} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^a.$$

Définition. Si x est un nombre réel strictement positif et y est un nombre réel arbitraire, alors x *puissance* y est le nombre réel noté « x^y » et défini par la condition :

> pour tous nombres rationnels p et q tels que y est entre p et q, on a que x^y est entre x^p et x^q (au sens large).

Exercice. Vérifier si toutes les définitions données sont correctes et cohérentes entre elles.

Voici quelques identités remarquables pour x et y réels *strictement positifs* et pour s et t réels :

(1) $x^{st} = (x^s)^t$,

(2) $x^1 = x$,

(3) $x^{s+t} = x^s x^t$,

(4) $x^{s-t} = x^s/x^t$,

(5) $x^0 = 1$,

(6) $(xy)^t = x^t y^t$,

(7) $(x/y)^t = x^t/y^t$,

(8) $1^t = 1$.

Exercice. Calculer $\sqrt{\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}}$, $\left(\sqrt{3}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{3^{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}$.

Dans une expression de la forme « x^y », la valeur de « x » est dit la *base*, et la valeur de « y » est dit l'*exposant*.

Définition. Le nombre x^y est aussi dit x *exposant* y, ainsi que l'*exponentielle* de y en *base* x.

Rapport aux relations d'ordre usuelles

Proposition. *Pour tous nombres réels* strictement positifs x *et* y *et pout tout nombre réel* t,

(1) *si* $x < y$ *et* $t > 0$, *alors* $x^t < y^t$, (2) *si* $x < y$ *et* $t < 0$, *alors* $x^t > y^t$.

Exercice. Prouver cette proposition.

Corollaire. *Pour tous nombres réels* strictement positifs x *et* y *et pout tout nombre réel* t,

(1) *si* $t > 0$, *alors les équivalences suivantes sont satisfaites* :

$$x < y \quad\Leftrightarrow\quad x^t < y^t, \qquad\qquad x \leqslant y \quad\Leftrightarrow\quad x^t \leqslant y^t,$$

(2) *si* $t < 0$, *alors les équivalences suivantes sont satisfaites* :

$$x < y \quad\Leftrightarrow\quad x^t > y^t, \qquad\qquad x \leqslant y \quad\Leftrightarrow\quad x^t \geqslant y^t.$$

Proposition. *Pour tous nombres réels* s *et* t *et pout tout nombre réel* strictement positif x,

(1) *si* $s < t$ *et* $x > 1$, *alors* $x^s < x^t$, (2) *si* $s < t$ *et* $x < 1$, *alors* $x^s > x^t$.

Exercice. Prouver cette proposition.

Corollaire. *Pour tous nombres réels* s *et* t *et pout tout nombre réel* strictement positif x,

(1) *si* $x > 1$, *alors les équivalences suivantes sont satisfaites* :

$$s < t \quad\Leftrightarrow\quad x^s < x^t, \qquad\qquad s \leqslant t \quad\Leftrightarrow\quad x^s \leqslant x^t,$$

(2) *si* $x < 1$, *alors les équivalences suivantes sont satisfaites* :

$$s < t \quad\Leftrightarrow\quad x^s > x^t, \qquad\qquad s \leqslant t \quad\Leftrightarrow\quad x^s \leqslant x^t.$$

I.11. Logarithmes

Proposition. *Si x et y sont nombres réels* strictement positifs *et $x \neq 1$, alors il existe un unique nombre réel z tel que $x^z = y$.*

Exercice. Prouver cette proposition.

Définition. Si $x > 0$, $y > 0$ et $x \neq 1$, alors l'unique nombre réel z tel que $x^z = y$ est dit le *logarithme* de y en *base* x et est noté « $\log_x y$ ». Dans le cas où $x = 1$, ainsi que dans le cas où $y \leqslant 0$ et $x \geqslant 0$, la valeur de « $\log_x y$ » n'est pas définie.

Cette définition de $\log_x$ (pour x strictement positif et différent de 1) peut être exprimée par l'équivalence suivante :

$$\log_x y = z \quad \Leftrightarrow \quad y = x^z.$$

Pour x strictement positif et différent de 1, l'opération $\log_x$ sur les nombres réels peut aussi être définie par les trois propriétés suivantes :

(1) $\log_x x^y = y$,

(2) $x^{\log_x y} = y$ si $y > 0$,

(3) la valeur de « $\log_x y$ » n'est définie que si $y > 0$.

En fait, la deuxième propriété résulte de la première, et la première résulte de la deuxième, donc il suffit de garder une seule parmi les deux.

Exercice. Calculer $\log_8 \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\log_3 \sqrt{3}^{\sqrt{2}}$.

Voici quelques identités remarquables satisfaites pour tous réels x, y, z, w, t, tels que $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $w > 0$, $x \neq 1$, $y \neq 1$:

(1) $(\log_x y)(\log_y z) = \log_x z$,

(2) $(\log_x y)(\log_y x) = 1$,

(3) $\log_x x = 1$,

(4) $w^{\log_x z} = z^{\log_x w}$,

(5) $\log_x zw = \log_x z + \log_x w$,

(6) $\log_x \dfrac{z}{w} = \log_x z - \log_x w$,

(7) $\log_x 1 = 0$,

(8) $\log_x z^t = (\log_x z)t$.

Exercice. Démontrer ces identités en admettant les propriétés de l'exponentiation présentées précédemment.

I.12. L'ensemble des nombres réels, est-il dénombrable ?

Serait-il juste de dire qu'il y a « plus » des nombres entiers relatifs que des nombres entiers naturels ? Pas vraiment, car on peut *énumérer* les nombres entiers aussi bien que les nombres naturels. En effet, voici une liste (infinie) de l'ensemble des nombres naturels :

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \ldots,$$

et en voici une de l'ensemble des entiers relatifs :

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3, \ldots.$$

De ce point de vue, il y a *autant* de nombres entiers que de nombres naturels. Les uns comme les autres peuvent être *énumérés* (rangés dans une liste infinie).

Définition. Un ensemble infini est dit *dénombrable* si et seulement si il peut être énuméré.

Les ensembles $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Z}$ sont donc dénombrables. L'ensemble de tous les mots en deux lettres « A » et « B » est aussi dénombrable :

A, B, AA, AB, BA, BB, AAA, AAB, … .

Considérons maintenant l'ensemble $\mathbf{R}$. Est-il dénombrable ?

Question. Peut-on énumérer les nombres réels ?

Supposons que l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels a été énuméré, et qu'on a obtenu ainsi une liste de tous les nombres réels :

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ \ldots.$$

(On a choisi ici d'indexer les nombres réels avec les nombres naturels, zéro inclus, mais on pourrais aussi bien commencer avec l'indice un : $t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ \ldots$.)

Considérons alors deux listes de nombres rationnels (ou même réels, peu importe)

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots \quad \text{et} \quad b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots$$

telles que pour tout indice n,

(1) $a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n$,

(2) $t_n \notin [a_n, b_n]$.

Avant de procéder, assurions-nous que des telles listes $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$ et $b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots$ existent. En voici une construction :

(1) Si $t_0 \geqslant 0$, posons

$$a_0 = -2, \qquad b_0 = -1,$$

et si $t_0 < 0$, posons

$$a_0 = 1, \qquad b_0 = 2.$$

(2) Pour tout n à partir de 1, si $t_n \geqslant \dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$, posons

$$a_n = a_{n-1}, \qquad b_n = \frac{2a_{n-1}+b_{n-1}}{3},$$

et sinon, posons

$$a_n = \frac{a_{n-1}+2b_{n-1}}{3}, \qquad b_n = b_{n-1}.$$

Il est facile de vérifier que les listes ainsi obtenues satisfont les deux propriétés requises.

Soient A l'ensemble des éléments de la liste $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,$ et B l'ensemble des éléments de la liste $b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots.$ Alors A et B sont non vides, et pour tous $a \in A$ et $b \in B$, on a que $a < b$. Donc, d'après les propriétés de l'ensemble des nombres réels déjà établies, il existe un nombre réel x tel que pour tous $a \in A$ et $b \in B$, on a que $a \leqslant x \leqslant b$. Soit n l'indice de x dans la liste $t_0,\ t_1,\ t_2,\ \ldots.$ Alors, $x = t_n \notin [a_n, b_n]$. Or, $a_n \leqslant x \leqslant b_n$. On a obtenu une contradiction.

On conclut que l'ensemble $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable.

Question. Peut-on énumérer les nombres rationnels ?