

Arithmétique 3

Alexey Muranov

17 avril 2025

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.

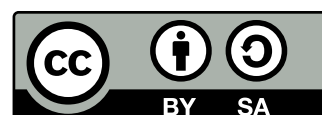


Table des matières

III. Nombres rationnels	1
III.1. Qu'est-ce que c'est, un nombre rationnel ?	1
III.2. Relations d'ordre usuelles	6
III.3. « Translation multiplicative » d'un entier par un nombre rationnel . . .	8
III.4. Addition et soustraction	8
III.5. Multiplication et division	11
III.6. Pour cent et pour mille	14
III.7. Valeur absolue	15
III.8. Exponentiation, puissances, racines	16
III.9. Systèmes de numération positionnels n -aires	19
III.10. Nombres n -aires	19
III.11. Logarithmes	21
III.12. Décomposition en une somme de nombres plus « simples »	21

III. Nombres rationnels

III.1. Qu'est-ce que c'est, un nombre rationnel ?

Rappelons nous que l'opération de division de nombres entiers peut être appliquée à deux nombres entiers a et b à la condition que b n'est pas nul et que b divise a , et que dans ce cas le résultat de cette opération est le *quotient* de a par b , noté « a/b » ou « $\frac{a}{b}$ ». La valeur du quotient « a/b » n'est définie comme un nombre entier que si b divise a .

Exercice. Essayer de compléter les tableaux suivants :

5	15	9	18	18	9	4	10
3	9	12	24	24	12	10	25
21	?	?	10	?	10	6	?
		1	0	0	1		
		5	0	0	5		
		100	?	?	100		

Le quotient de deux nombres exprime un certain rapport entre ces nombres, qu'on pourrait appeler leur « rapport multiplicatif ». Par exemple, le « rapport multiplicatif » entre 15 et 5 est le même qu'entre 9 et 3, et le même qu'entre 63 et 21, mais différent de celui entre 18 et 9. En effet :

$$\frac{15}{5} = \frac{9}{3} = \frac{63}{21} = 3 \neq 2 = \frac{18}{9}.$$

Cependant, il paraît clair que le « rapport multiplicatif » entre 5 et 15 doit être le même qu'entre 3 et 9. Or, aucun nombre entier n'exprime, dans le sens précédent, le « rapport multiplicatif » entre 5 et 15, ni entre 3 et 9, car les valeurs des quotients « $5/15$ » et « $3/9$ » ne sont pas définies comme nombres entiers.

Notons ($\underset{\times}{\simeq}$) la relation entre couples de nombres entiers dont le sens sera le suivant :

« $(a, b) \underset{\times}{\simeq} (c, d)$ » veut dire que le « rapport multiplicatif » entre b et a est le même qu'entre d et c .

Essayons de donner une définition précise de la relation $(\simeq_x)$ en accord avec l'idée intuitive du « rapport multiplicatif ». On souhaite, en particulier, que

$$(5, 15) \simeq_x (3, 9) \simeq_x (21, 63) \not\simeq_x (9, 18),$$

mais aussi que

$$(15, 5) \simeq_x (9, 3) \simeq_x (63, 21) \not\simeq_x (5, 15),$$

ainsi que

$$(1, 0) \simeq_x (5, 0) \quad \text{et} \quad (0, 1) \simeq_x (0, 5).$$

Dans le cas où $0 \neq a \mid b$ et $0 \neq c \mid d$, on souhaite que l'équivalence suivante soit satisfaite :

$$(a, b) \simeq_x (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Cependant, l'équation « $b/a = d/c$ » ne peut servir comme la définition du sens de « $(a, b) \simeq_x (c, d)$ » que si $0 \neq a \mid b$ et $0 \neq c \mid d$, car sinon, les valeurs des quotients « b/a » et « d/c » ne sont pas toutes les deux définies (comme nombres entiers). Le problème est dans l'opération de division.

Comment peut-on vérifier si $b/a = d/c$ sans utiliser l'opération de division ? Une solution est évidente : il suffit de vérifier si $bc = da$, car

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad \Leftrightarrow \quad bc = da$$

dans le cas où $0 \neq a \mid b$ et $0 \neq c \mid d$.

Les valeurs des deux membres de l'équation « $bc = da$ » (de ses parties gauche et droite) sont définies pour tous nombres entiers a, b, c, d . On va utiliser cette équation pour définir la relation $(\simeq_x)$, qui est censée traduire l'idée intuitive du « rapport multiplicatif ».

Notons cependant que le couple $(0, 0)$ est « spécial » : il est difficile de voir ce que pourrait être le « rapport multiplicatif » entre 0 et 0, cette notion ne semble pas avoir du sens. Pour cette raison, on ne va pas parler du « rapport multiplicatif » entre 0 et 0, et on va « exclure » le couple $(0, 0)$ dans la définition suivante.

Définition. Définissons la relation $(\simeq_x)$ entre deux couples de nombres entiers (a, b) et (c, d) tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(c, d) \neq (0, 0)$ par l'équivalence suivante :

$$(a, b) \simeq_x (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad bc = da.$$

Notons que, d'après cette définition, si a, b, c, d sont des entiers non nuls, alors

$$\begin{aligned} (a, b) \simeq_x (c, d) &\Leftrightarrow (b, a) \simeq_x (d, c) \\ &\Leftrightarrow (a, c) \simeq_x (b, d) \quad \Leftrightarrow \quad (c, a) \simeq_x (d, b). \end{aligned}$$

Exercice. Vérifier sur des exemples si la définition donnée ci-dessus de la relation $(\simeq_x)$ est en accord avec l'idée intuitive du « rapport multiplicatif ».

Exercice. Soient a, b, c, d quatre nombres entiers. Montrer que $(a, b) \simeq_x (c, d)$ si et seulement si il existe deux nombres entiers e et f non nuls tels que $ea = fc$ et $eb = fd$.

Les trois propriétés suivantes de la relation $(\simeq_x)$ sont d'une importance particulière pour la définition des nombres rationnels : pour tous nombres entiers a, b, c, d, e, f tels que $(a, b) \neq (0, 0)$, $(c, d) \neq (0, 0)$ et $(e, f) \neq (0, 0)$,

$$(1) \text{ si } (a, b) \simeq_x (c, d) \text{ et } (c, d) \simeq_x (e, f), \text{ alors } (a, b) \simeq_x (e, f),$$

$$(2) (a, b) \simeq_x (a, b),$$

$$(3) \text{ si } (a, b) \simeq_x (c, d), \text{ alors } (c, d) \simeq_x (a, b).$$

Exercice. Démontrer ces propriétés.

Prenons en plus note des deux lemmes suivants.

Lemme. Si a, b, c sont trois nombres entiers tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $c \neq 0$, alors $(a, b) \simeq_x (ac, bc)$.

Lemme. (1) Si a, b, c sont trois nombres entiers tels que $a \neq 0$ et $(a, b) \simeq_x (a, c)$, alors $b = c$.

(2) Si a, b, c sont trois nombres entiers tels que $c \neq 0$ et $(a, c) \simeq_x (b, c)$, alors $a = b$.

Exercice. Prouver ces lemmes.

Ainsi on a défini le sens de la phrase « le rapport multiplicatif entre b et a est le même qu'entre d et c » : cela veut dire que $bc = da$ (à la condition que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(c, d) \neq (0, 0)$). En plus, si $a \mid b$ et $c \mid d$, les « rapports multiplicatifs » entre b et a et entre d et c sont exprimés par les nombres entiers b/a et d/c , et pour voir si les deux « rapports multiplicatifs » sont les mêmes, il suffit de voir si $b/a = d/c$. Mais, comme déjà mentionné, aucun nombre entier n'exprime, dans ce sens, le « rapport multiplicatif » entre 5 et 15, ni entre 3 et 2, car les valeurs des quotients « $5/15$ » et « $3/2$ » ne sont pas définies comme nombres entiers.

Une issue de cette situation est d'inventer de nouveaux nombres pour exprimer les quotients « manquantes » de nombres entiers.

Définition. Définissons les nombres *rationnels* ainsi :

- (1) tout nombre entier est *rationnel*;
- (2) si a et b sont deux entiers tels que $a \neq 0$, mais que la valeur du quotient « b/a » n'est pas définie comme un entier (car $a \nmid b$), on admet que le quotient b/a est un nombre *rationnel*;

- (3) si a, b, c, d sont quatre entiers tels que $a \neq 0$ et $c \neq 0$, on admet que le nombre rationnel d/c est le même que le nombre rationnel b/a si et seulement si $(c, d) \stackrel{\times}{\simeq} (a, b)$:

$$\frac{d}{c} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow (c, d) \stackrel{\times}{\simeq} (a, b) \Leftrightarrow bc = da ;$$

- (4) tout nombre rationnel est le quotient d'un entier par un entier non nul ;
 (5) il n'existe toujours pas de quotient d'un entier par 0.

Notation. L'ensemble des nombres rationnels sera noté « $\mathbf{Q}$ ».

Remarque. On pourrait introduire un « nombre » pour exprimer le « rapport multiplicatif » entre un rationnel non nul et 0 (d'après notre définition, si x et y sont deux rationnels non nuls, alors $(0, x) \stackrel{\times}{\simeq} (0, y)$). Cependant, ce « nombre » aurait des propriétés assez particulières, souvent on devrait le traiter séparément, et il serait peu utile dans l'étude de l'arithmétique.¹ Si on note ce nombre « ∞ » et tente de prolonger les définitions des opérations usuelles pour pouvoir les appliquer à ∞ , on pourra finir avec les propriétés suivantes :

- (1) $x/0 = x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty$ pour tout $x \neq 0$. En particulier, $\infty/0 = \infty \cdot \infty = \infty$.
 (2) Les valeurs de « $\infty \cdot 0$ » et de « $0 \cdot \infty$ » ne sont pas définies.
 (3) $x/\infty = 0$ et $\infty/x = \infty$ pour tout $x \neq \infty$.
 (4) La valeur de « ∞/∞ » n'est pas définie.
 (5) $x + \infty = \infty + x = x - \infty = \infty - x = \infty$ pour tout $x \neq \infty$. En particulier, $-\infty = 0 - \infty = \infty$.
 (6) Les valeurs de « $\infty + \infty$ » et de « $\infty - \infty$ » ne sont pas définies ; en particulier, « $\infty + \infty$ » ne veut pas dire la même chose que « $\infty \cdot 2$ », et « $\infty - \infty$ » ne fait pas 0.

On va se passer d'un tel « nombre » bizarre. Donc, la valeur de « $x/0$ » ne sera pas définie.

Notons que tout nombre rationnel peut être écrit comme le quotient de deux nombres entiers. En plus, tout nombre rationnel non nul peut être écrit comme le quotient de deux entiers premiers entre eux.

Proposition. *Pour tout nombre rationnel x , il existe un unique couple de nombres entiers a, b tel que :*

- (1) $b/a = x$,

¹ En analyse complexe, on utilise un tel « nombre » ∞ pour compléter le plan complexe en la sphère complexe. Cependant, il ne faut pas confondre ∞ de l'analyse complexe avec ce qu'on note « ∞ » en analyse réel, où les propriétés de ∞ sont différentes, et, en particulier, $-\infty$ n'est pas la même chose que ∞ .

(2) a et b sont premiers entre eux,

(3) $a > 0$.

Démonstration. Montrons d'abord l'existence. Soient a et b deux nombres entiers tels que $x = b/a$. (En particulier, $a \neq 0$.) Soit d un PGCD entier de a et b . Soient u et v deux entiers tels que $a = du$ et $b = dv$. Alors :

(1) $x = v/u$ et $x = (-v)/(-u)$,

(2) u est premier avec v et $-u$ est premier avec $-v$,

(3) soit $u > 0$, soit $-u > 0$.

Ainsi l'existence est établie.

Montrons maintenant l'unicité. Supposons que a, b, c, d sont des entiers tels que :

(1) $x = b/a$ et $x = d/c$,

(2) a est premier avec b et c est premier avec d ,

(3) $a > 0$ et $c > 0$.

Montrons que dans ce cas $a = c$ et $b = d$.

Comme $b/a = d/c$, on a que $bc = da$. Vu que $bc = da$ et que a et b sont premiers entres eux, a divise c (et aussi b divise d) d'après le lemme d'Euclide généralisé. Par ce même raisonnement, comme c et d sont premiers entres eux, c divise a (et aussi d divise b). Comme a et c divisent l'un l'autre et sont tous les deux strictement positifs, ils sont égaux ($a = c$). D'où, $ba = da$, et donc $b = d$ (car $a \neq 0$).

Donc, l'unicité est démontrée aussi. $\square$

Définition. Une *fraction* est une expression de la forme « b/a » (ou « $\frac{b}{a}$ », ou « $b \div a$ »), qui représente le résultat de la division (le quotient) de la valeur de « b » par la valeur de « a ». Le *numérateur* de la fraction « b/a » est « b », et le *dénominateur* de « b/a » est « a ». On peut aussi appeler *numérateur* et *dénominateur* de « b/a » les valeurs de « b » et de « a ».

Définition. Une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont entiers est dite :

(1) *irréductible* si et seulement si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux,

(2) *réductible* si et seulement si son numérateur et son dénominateur ont un diviseur commun différent de ± 1 .

Exemples. Les fractions « $3/1$ », « $1/3$ », « $3/10$ », « $10/3$ » sont irréductibles. Les fractions « $3/6$ », « $6/3$ », « $4/10$ », « $10/4$ » sont réductibles.

III.2. Relations d'ordre usuelles

Définition. Définissons les relations $(\leq)$, $(\geq)$, $(<)$, $(>)$ entre des rationnels par les équivalences suivantes, où a est un entier *strictement positif* ($a > 0$), alors que b et c sont deux nombres entiers arbitraires :

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} \leq \frac{c}{a} &\Leftrightarrow b \leq c, & \frac{b}{a} \geq \frac{c}{a} &\Leftrightarrow b \geq c, \\ \frac{b}{a} < \frac{c}{a} &\Leftrightarrow b < c, & \frac{b}{a} > \frac{c}{a} &\Leftrightarrow b > c. \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que ces définitions sont toutes correctes et complètes.

Proposition. La définition donnée ci-dessus de la relation $(\leq)$ est correcte. C'est-à-dire, quels que soient six nombres entiers $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$, tels que $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$, si $b_1/a_1 = b_2/a_2$ et $c_1/a_1 = c_2/a_2$, alors

$$b_1 \leq c_1 \Leftrightarrow b_2 \leq c_2.$$

Démonstration. Soient $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ six nombres entiers tels que $a_1 > 0, a_2 > 0$, $b_1/a_1 = b_2/a_2$ et $c_1/a_1 = c_2/a_2$. Alors,

$$(a_1, b_1) \underset{\times}{\simeq} (a_2, b_2) \quad \text{et} \quad (a_1, c_1) \underset{\times}{\simeq} (a_2, c_2)$$

(voir la définition des *nombres rationnels*), c'est-à-dire, $b_1 a_2 = b_2 a_1$ et $c_1 a_2 = c_2 a_1$.

D'après les propriétés des nombres entiers déjà établies,

$$b_1 \leq c_1 \Leftrightarrow b_1 a_2 \leq c_1 a_2 \Leftrightarrow b_2 a_1 \leq c_2 a_1 \Leftrightarrow b_2 \leq c_2. \quad \square$$

Exercice. Vérifier si les définitions des relations $(\geq)$, $(<)$, $(>)$ sont correctes elles aussi.

Proposition. Les définitions données ci-dessus des relations $(\leq)$, $(\geq)$, $(<)$, $(>)$ sont toutes complètes. C'est-à-dire, quels que soient deux nombres rationnels x et y , il existe trois nombres entiers a, b, c tels que $a > 0, x = b/a$ et $y = c/a$.

Démonstration. Soient x et y deux nombres rationnels arbitraires. Soient a, b, c, d nombres entiers tels que $x = a/b$ et $y = c/d$. Alors

$$x = \frac{ad}{bd} \quad \text{et} \quad y = \frac{cb}{db} = \frac{cb}{bd}. \quad \square$$

Les relations $(\leq)$, $(\geq)$, $(<)$, $(>)$ sont reliées par les équivalences suivantes :

- (1) $x \leq y$ si et seulement si $y \geq x$,
- (2) $x < y$ si et seulement si $y > x$,
- (3) $x \leq y$ si et seulement si $x < y$ ou $x = y$,

(4) $x < y$ si et seulement si $x \leq y$ et $x \neq y$.

Exercice. Vérifier ces équivalences.

Les quatre propriétés suivantes de la relation ($\leq$) entre des nombres rationnels sont les mêmes que pour la relation ($\leq$) entre des nombres entiers :

(1) si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$, (3) si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$,

(2) $x \leq x$, (4) $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Exercice. Démontrer ces propriétés.

Les trois propriétés suivantes de la relation ($<$) entre des nombres rationnels sont les mêmes que pour la relation ($<$) entre des nombres entiers :

(1) si $x < y$ et $y < z$, alors $x < z$,

(2) si $x < y$, alors $x \neq y$,

(3) si $x \neq y$, alors $x < y$ ou $y < x$.

Exercice. Démontrer ces propriétés.

Exercice. Écrire les nombres rationnels suivants sous la forme simplifiée en les rangeant dans l'ordre croissant : $\frac{4}{7}, \frac{-2}{5}, \frac{1}{-3}, \frac{-4}{-6}$.

Notation. Si x et y sont deux rationnels, on va noter « $\max(x, y)$ » le plus grand entre x et y et « $\min(x, y)$ » le plus petit entre x et y :

$$\max(x, y) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} x & \text{si } x \geq y, \\ y & \text{si } x \leq y; \end{cases} \quad \min(x, y) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} x & \text{si } x \leq y, \\ y & \text{si } x \geq y. \end{cases}$$

Rationnels positifs et négatifs

Définition. Un nombre rationnel x est dit :

(1) *positif* (au sens large) si et seulement si $x \geq 0$,

(2) *négatif* (au sens large) si et seulement si $x \leq 0$,

(3) *strictement positif* si et seulement si $x > 0$,

(4) *strictement négatif* si et seulement si $x < 0$.

III.3. « Translation multiplicative » d'un entier par un nombre rationnel

Définition. Si a est un entier non nul, b est un entier, et $x = b/a$, alors le *produit* de a et du nombre rationnel x , noté « ax », est b :

$$a(b/a) \stackrel{\text{déf}}{=} b.$$

Cette définition est clairement en accord avec la définition de la multiplication des nombres entiers, car si a , b et b/a sont tous nombres entiers ($a \neq 0$), alors le produit de a et b/a est b , au sens de la multiplication des nombres entiers. Ainsi, cette définition, pourvu qu'elle soit correcte, *prolonge* l'opération de multiplication des nombres entiers.

Il est facile de montrer que cette définition est correcte, c'est-à-dire, que si a est un nombre entier non nul et x est un nombre rationnel tels que la définition s'applique pour donner une valeur de « ax », alors elle ne donnera qu'une valeur unique. En effet : si b_1 et b_2 sont deux nombres entiers tels que $x = b_1/a = b_2/a$, alors $b_1 = b_2$, d'après un lemme précédent.

Exemple. $6(2/3) = 6(4/6) = 4$.

Exercice. Calculer et simplifier : $6(3/2)$.

Cependant, la valeur de « $3(1/2)$ » n'est pas encore définie.

Soit x un nombre rationnel. Si a et b sont deux entiers tels que $x = b/a$, alors on va, de manière informelle, appeler $b = ax$ le « *translaté multiplicatif* » de a par x . On peut parler de l'opération de « *translation multiplicative* » par x , qui à certains entiers associe leurs translatés multiplicatifs par x .

III.4. Addition et soustraction

D'après la définition de la « translation multiplicative », quels que soient trois nombres entiers a , b , c , avec $a \neq 0$, on a :

$$a \cdot \frac{b}{a} + a \cdot \frac{c}{a} = b + c = a \cdot \frac{b+c}{a}.$$

Cette observation suggère qu'il est naturel de définir l'opération d'*addition* (+) des nombres rationnels de telle manière que pour tous nombres entiers a , b , c , avec $a \neq 0$, on ait l'égalité :

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{b+c}{a}.$$

Définition. Si a est un entier non nul, b et c sont deux entiers, $x = b/a$ et $y = c/a$, alors la *somme* des nombres rationnels x et y , notée « $x + y$ », est $(b+c)/a$:

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{a} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{b+c}{a}.$$

Exercice. Montrer que cette définition est correcte et complète.

Ainsi on a défini l'opération d'*addition* (+) qui à deux n'importe quels nombres rationnels associe leur somme.

Exemples.

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}, \quad \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{19}{12}.$$

Exercice. Calculer et simplifier : $2/3 + 3/2$, $(-2)/3 + 3/2$, $(-2)/3 + 3/(-2)$.

En général, pour tous nombres entiers a, b, c, d , avec b et d non nuls,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Les trois identités suivantes satisfaites par l'opération d'addition de nombres rationnels sont les mêmes que pour l'opération d'addition de nombres entiers :

$$(1) \quad x + (y + z) = (x + y) + z,$$

$$(2) \quad x + 0 = x = 0 + x,$$

$$(3) \quad y + x = x + y.$$

Exercice. Démontrer ces identités.

Lemme. Soit x un nombre rationnel arbitraire. Soient a et b deux entiers tels que $x = b/a$. Posons $y = (-b)/a$. Alors $x + y = 0 = y + x$.

Exercice. Prouver ce lemme.

Proposition. Pour tous nombres rationnels x et y , il existe un unique nombre rationnel z tel que $z + y = x$.

Exercice. Prouver cette proposition.

Définition. Deux nombres rationnels x et y sont dits *opposés* l'un de l'autre si et seulement si $x + y = 0$.

Définition. Si x et y sont deux nombres rationnels, alors l'unique nombre rationnel z tel que $z + x = y$ est dit la *différence* de y et x et est noté « $y - x$ ».

Ainsi on a défini l'opération de *soustraction* (−) qui à deux n'importe quels nombres rationnels associe leur différence.

Exercice. Calculer et simplifier : $2/3 - 3/2$, $(-2)/3 - 3/2$, $(-2)/3 - 3/(-2)$.

La définition de l'opération de soustraction $(-)$ donnée ci-dessus peut être exprimée par l'équivalence suivante :

$$y - x = z \quad \Leftrightarrow \quad y = z + x.$$

L'opération de soustraction $(-)$ de nombres rationnels peut aussi être définie par les deux identités suivantes, à la condition que l'opération d'addition $(+)$ est déjà définie :

$$(1) \quad (x + y) - y = x, \quad (2) \quad (x - y) + y = x.$$

En fait, n'importe quelle de ces deux identités suffit toute seule pour définir l'opération de soustraction de nombres rationnels.

Exercice. Montrer que n'importe quelle de ces deux identités suffit toute seule pour définir l'opération de soustraction de nombres rationnels.

Exercice. Soient a, b, c, d quatre nombres entiers, avec b et d non nuls. Montrer que

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

Les identités suivantes satisfaites pour tous x, y, z rationnels sont les même que pour les nombres entiers :

$$\begin{array}{ll} (1) \quad x + (y - z) = (x + y) - z, & (6) \quad (x - y) + z = (x + z) - y, \\ (2) \quad x - (y + z) = (x - z) - y, & (7) \quad (x - y) - z = (x - z) - y, \\ (3) \quad x - (y - z) = (x + z) - y, & (8) \quad x - (x - y) = y, \\ (4) \quad (x - y) + (y - z) = x - z, & (9) \quad x - 0 = x, \\ (5) \quad (x + z) - (y + z) = x - y, & (10) \quad x - x = 0. \end{array}$$

Exercice. Démontrer ces identités.

Notation. L'expression « $+x$ » veut dire $0 + x$ ($= x$). L'expression « $-x$ » veut dire $0 - x$.

Rapport aux relations d'ordre usuelles

Proposition. Pour tous nombres rationnels x, y, z , si $x < y$, alors $x + z < y + z$.

Exercice. Prouver cette proposition.

Corollaire. Pour tous nombres rationnels x, y, z , les équivalences suivantes sont satisfaites :

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad x + z < y + z, \quad x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x + z \leq y + z.$$

Proposition. Pour tous nombres rationnels x, y, z , si $x < y$, alors $z - x > z - y$.

Exercice. Prouver cette proposition.

Corollaire. Pour tous nombres rationnels x, y, z , les équivalences suivantes sont satisfaites :

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad z - x > z - y, \quad x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad z - x \geq z - y.$$

III.5. Multiplication et division

Définition. Si n est un nombre naturel et x est un nombre rationnel, alors le *produit* de x et n , noté « $x \times n$ », « $x \cdot n$ », ou « xn », est défini par la règle :

$$xn \stackrel{\text{déf}}{=} 0 \underbrace{+ x + x + \cdots + x}_{n \text{ fois}}.$$

Définition. Si m et n sont deux nombres naturels, x est un nombre rationnel, et $a = n - m$, alors le *produit* de x et a , noté « $x \times a$ », « $x \cdot a$ », ou « xa », est défini par la règle :

$$x(n - m) \stackrel{\text{déf}}{=} 0 \underbrace{+ x + x + \cdots + x}_{n \text{ fois}} \underbrace{- x - x - \cdots - x}_{m \text{ fois}} = xn - xm.$$

Lemme. Si a est un entier non nul et b et c sont deux entiers, alors

$$\frac{b}{a} \cdot c = \frac{bc}{a}.$$

Exercice. Prouver ce lemme.

Lemme. Soient a et b deux entiers non nuls et c un entier. Alors

$$\frac{c}{ab} \cdot a = \frac{c}{b}.$$

En plus, si x est un nombre rationnel tel que $xa = c/b$, alors $x = c/(ab)$.

Exercice. Prouver ce lemme.

Lemme. Pour tout nombre rationnel x et pour tout entier a non nul, il existe un unique nombre rationnel y tel que $ya = x$.

Exercice. Prouver ce lemme.

Définition. Si a est un entier non nul et x est un nombre rationnel, alors l'unique nombre rationnel y tel que $ya = x$ est dit le *quotient* de x par a et est noté « $x \div a$ », ou « $x : a$ », ou « x/a », ou « $a \backslash x$ », ou « $\frac{x}{a}$ ».

Définition. Si a est un entier non nul, b est un entier, x est un nombre rationnel, et $y = b/a$, alors le *produit* de x et y , noté « $x \times y$ », « $x \cdot y$ », ou « xy », est défini par la règle :

$$x \cdot \frac{b}{a} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{xb}{a} = \frac{x}{a} \cdot b.$$

Exercice. Vérifier si ces définitions sont toutes correctes.

Ainsi on a défini l'opération de *multiplication* $(\cdot)$ (aussi notée « $(\times)$ ») qui à deux n'importe quels nombres rationnels associe leur produit.

Exercice. Calculer et simplifier :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}, \quad \frac{-1}{2} \cdot \frac{3}{4}, \quad \frac{-1}{2} \cdot \frac{3}{-4}.$$

Remarque. Le produit de nombres rationnels *non nuls* pourrait être défini par la règle : si a, b, c sont des entiers non nuls, alors

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} = \frac{c}{a}.$$

Proposition. Pour tous nombres rationnels x et y , $yx = xy$.

Exercice. Prouver cette proposition.

Les identités suivantes sont satisfaites :

- | | |
|-----------------------------------|----------------------------|
| (1) $x(yz) = (xy)z$, | (4) $x(y + z) = xy + xz$, |
| (2) $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$, | (5) $x(y - z) = xy - xz$, |
| (3) $yx = xy$, | (6) $x \cdot 0 = 0$. |

Exercice. Démontrer ces identités.

Lemme. Soit x un nombre rationnel non nul. Soient a et b deux entiers tels que $x = b/a$. Posons $y = a/b$. Alors $xy = 1 = yx$.

Exercice. Prouver ce lemme.

Proposition. Pour tous nombres rationnels x et y avec $y \neq 0$, il existe un unique nombre rationnel z tel que $zy = x$.

Démonstration. Soient x un nombre rationnel arbitraire et y un nombre rationnel non nul. Soit v un nombre rationnel tel que $yv = vy = 1$ (il existe d'après le lemme précédent). Alors

$$(xv)y = x(vy) = x \cdot 1 = x.$$

On a montré l'existence, il reste à montrer l'unicité : que si z est un nombre rationnel tel que $zy = x$, alors $z = xv$.

Soit z un nombre rationnel tel que $zy = x$. Alors

$$z = z \cdot 1 = z(yv) = (zy)v = xv. \quad \square$$

Corollaire. Si x et y sont nombres rationnels tels que $x \neq 0$ et $y \neq 0$, alors $xy \neq 0$.

Définition. Deux nombres rationnels x et y sont dits *réiproques* l'un de l'autre si et seulement si $xy = 1$.

Définition. Si x est un nombre rationnel non nul et y est un nombre rationnel, alors l'unique nombre rationnel z tel que $zx = y$ est dit le *quotient* de y par x et est noté « $y \div x$ », ou « $y : x$ », ou « y/x », ou « $x \backslash y$ », ou « $\frac{y}{x}$ ».

Ainsi on a défini l'opération de *division* ($/$) qui à n'importe quels deux nombres rationnels, dont le deuxième n'est pas zéro, associe leur quotient.

Exercice. Calculer et simplifier :

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}, \quad \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{3}{4}}, \quad \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{3}{-4}}.$$

La définition de l'opération de division donnée ci-dessus peut être exprimée par l'équivalence suivante :

$$\frac{y}{x} = z \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ y = zx \end{cases}.$$

L'opération de division ($/$) de rationnels peut aussi être définie par les trois propriétés suivantes, à la condition que l'opération de multiplication ($\cdot$) est déjà définie :

- (1) $(xy)/y = x$ si $y \neq 0$,
- (2) $(x/y)y = x$ si $y \neq 0$,
- (3) la valeur de « x/y » n'est pas définie si $y = 0$.

En fait, la deuxième propriété résulte de la première, et la première résulte de la deuxième, donc il suffit de garder une seule parmi les deux.

Exercice. Montrer que la deuxième propriété résulte de la première, et que la première résulte de la deuxième.

Voici quelques identités remarquables satisfaites par l'opération de division des nombres rationnels à la condition que les valeurs de tous les quotients soient définis (que les dénominateurs ne soient pas 0) :

- (1) $x(y/z) = (xy)/z$,
- (2) $x/(yz) = (x/z)/y$,
- (3) $x/(y/z) = (xz)/y$,
- (4) $(x/y)(y/z) = x/z$,
- (5) $(xz)/(yz) = x/y$,
- (6) $(x/y)z = (xz)/y$,
- (7) $(x/y)/z = (x/z)/y$,
- (8) $x/(x/y) = y$,
- (9) $x/1 = x$,
- (10) $x/x = 1$,
- (11) $(x+y)/z = x/z + y/z$,
- (12) $(x-y)/z = x/z - y/z$,
- (13) $0/x = 0$.

Exercice. Démontrer ces identités.

Rapport aux relations d'ordre usuelles

Proposition. Pour tous nombres rationnels x, y, z ,

- (1) si $x < y$ et $z > 0$, alors $xz < yz$, (2) si $x < y$ et $z < 0$, alors $xz > yz$.

Exercice. Prouver cette proposition.

Corollaire. Pour tous nombres rationnels x, y, z ,

- (1) si $z > 0$, alors les équivalences suivantes sont satisfaites :

$$x < y \Leftrightarrow xz < yz, \quad x \leq y \Leftrightarrow xz \leq yz,$$

- (2) si $z < 0$, alors les équivalences suivantes sont satisfaites :

$$x < y \Leftrightarrow xz > yz, \quad x \leq y \Leftrightarrow xz \geq yz.$$

Corollaire. Pour tous nombres rationnels x et y ,

- (1) si $x > 0$ et $y > 0$, alors $xy > 0$, (3) si $x < 0$ et $y > 0$, alors $xy < 0$,
 (2) si $x > 0$ et $y < 0$, alors $xy < 0$, (4) si $x < 0$ et $y < 0$, alors $xy > 0$.

Corollaire. Pour tout nombre rationnel x , $xx \geq 0$.

Proposition. Pour tous nombres rationnels strictement positifs x, y, z , si $x < y$, alors $z/x > z/y$.

Exercice. Prouver cette proposition.

Corollaire. Pour tous nombres rationnels strictement positifs x, y, z , les équivalences suivantes sont satisfaites :

$$x < y \Leftrightarrow z/x > z/y, \quad x \leq y \Leftrightarrow z/x \geq z/y.$$

III.6. Pour cent et pour mille

Définition. Si x est un nombre rationnel, alors x pour cent, noté « $x\%$ », est le quotient de x par cent :

$$x\% \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{x}{100}.$$

Exemples.

$$125\% = \frac{125}{100} = \frac{5}{4} = 1,25, \quad \frac{3}{2}\% = \frac{3}{200} = 0,015, \quad \frac{2}{3}\% = \frac{1}{150}.$$

Plutôt que définir « $x \%$ », on peut tout simplement définir

$$\% \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{100}.$$

Alors,

$$x \% = x \cdot \% = x \cdot \frac{1}{100} = \frac{x}{100}.$$

Définition. Si x est un nombre rationnel, alors x *pour mille*, noté « $x \text{‰}$ », est le quotient de x par mille :

$$x \text{‰} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{x}{1000}.$$

Exemples.

$$125 \text{‰} = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8} = 0,125, \quad \frac{3}{2} \text{‰} = \frac{3}{2000} = 0,0015, \quad \frac{2}{3} \text{‰} = \frac{1}{1500}.$$

Plutôt que définir « $x \text{‰}$ », on peut tout simplement définir

$$\text{‰} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{1000}.$$

III.7. Valeur absolue

Définition. La *valeur absolue* d'un nombre rationnel x , notée « $|x|$ », est définie ainsi :

$$|x| \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} +x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

En utilisant la notation avec « max », on peut définir la valeur absolue d'un nombre rationnel x par la formule :

$$|x| = \max(x, -x).$$

Une autre façon (équivalente) de définir la valeur absolue d'un nombre rationnel x est par l'équivalence suivante :

$$|x| = y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \geq 0 \\ xx = yy \end{cases}.$$

Exercice. Montrer que la valeur absolue peut être définie par cette équivalence.

Lemme. Pour tous nombres rationnels x et y ,

$$\begin{aligned} |x| \leq y &\Leftrightarrow -y \leq x \leq y, \\ |x| < y &\Leftrightarrow -y < x < y. \end{aligned}$$

Une démonstration de ce lemme est identique au cas des entiers.

Proposition (Inégalité triangulaire). *Pour tous nombres rationnels x et y ,*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Une démonstration de cette proposition est identique au cas des entiers.

Proposition. *Pour tous nombres rationnels x et y ,*

$$|xy| = |x| |y|.$$

Exercice. Prouver cette proposition.

Corollaire. *Pour tous nombres rationnels x et $y \neq 0$,*

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Exercice. Prouver ce corollaire.

III.8. Exponentiation, puissances, racines

Définition. Si n est un nombre naturel et x est un nombre rationnel, alors x *puissance n* , ou la n -ième *puissance* de x , ou x *élevé à la n -ième puissance*, est le nombre noté « x^n » et défini par la règle :

$$x^n \stackrel{\text{déf}}{=} 1 \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ fois}}.$$

Définition. Si m et n sont deux nombres naturels, x est un nombre rationnel non nul, et $a = n - m$, alors x *puissance a* est le nombre noté « x^a » et défini par la règle :

$$x^{n-m} \stackrel{\text{déf}}{=} 1 \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ fois}} \underbrace{/x/x/\dots/x}_{m \text{ fois}} = \frac{x^n}{x^m}.$$

Exercice. Calculer : 3^2 , 2^3 , 3^{-2} , 2^{-3} , $(-3)^{-2}$, $(-2)^{-3}$, $(2/3)^2$, $(3/2)^2$, $(2/3)^{-2}$, $(3/2)^{-2}$.

Voici quelques identités remarquables pour a et b entiers et pour x et y rationnels *non nuls* :

$$(1) \quad x^{ab} = (x^a)^b,$$

$$(3) \quad x^{a+b} = x^a x^b,$$

$$(6) \quad (xy)^a = x^a y^a,$$

$$(2) \quad x^1 = x,$$

$$(4) \quad x^{a-b} = x^a / x^b,$$

$$(7) \quad (x/y)^a = x^a / y^a,$$

$$(5) \quad x^0 = 1,$$

$$(8) \quad 1^a = 1.$$

Exercice. Démontrer ces identités.

Question. Est-ce qu'il existe un nombre rationnel x tel que $x^2 = 2$?

Définition. Si n est un nombre naturel non nul, une *racine n -ième* d'un nombre x est un nombre y tel que $y^n = x$. Une racine deuxième est aussi dite *racine carrée*, et une racine troisième est aussi dite *racine cubique*.

Définition. Soient n un nombre naturel impair et x un nombre rationnel qui est la n -ième puissance d'un nombre rationnel y ($x = y^n$). Alors **la** racine n -ième de x est l'unique racine n -ième rationnelle de x (donc y).

Définition. Soient n un nombre naturel non nul et x un nombre rationnel positif ($x \geq 0$) qui est la n -ième puissance d'un nombre rationnel y ($x = y^n$). Alors **la** racine n -ième de x est l'unique racine n -ième positive de x (donc $|y|$). Si x est strictement positif ($x > 0$), alors la racine n -ième positive de x est aussi dite la racine n -ième *principale* de x .

Notation. Si n est un nombre naturel non nul et x est un nombre rationnel qui admet une racine n -ième rationnelle², alors on note « $\sqrt[n]{x}$ » ou « $\sqrt[n]{x}$ » l'unique racine n -ième rationnelle de x si n est impair, et on note « $\sqrt[n]{x}$ » ou « $\sqrt[n]{x}$ » l'unique racine n -ième positive de x si n est pair. Si n est pair et x est strictement négatif, alors la valeur de l'expression « $\sqrt[n]{x}$ » n'est pas définie (l'expression « $\sqrt[n]{x}$ » n'a pas de sens). Dans le cas où $n = 2$, on utilise aussi la notation « $\sqrt{x}$ » au lieu de « $\sqrt[2]{x}$ ».

Ainsi, si n est un nombre naturel *impair*, alors pour tous x et y rationnels,

$$\sqrt[n]{x} = y \quad \Leftrightarrow \quad x = y^n,$$

et si n est un nombre naturel non nul *pair*, alors pour tous x et y rationnels,

$$\sqrt[n]{x} = y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \geq 0 \\ x = y^n \end{cases}.$$

Pour n naturel *impair*, l'opération $\sqrt[n]{}$ sur les nombres rationnels peut aussi être définie par les trois propriétés suivantes :

- (1) $\sqrt[n]{x^n} = x$,
- (2) $(\sqrt[n]{x})^n = x$ si x est la n -ième puissance d'un nombre rationnel,
- (3) la valeur de « $\sqrt[n]{x}$ » n'est définie (comme un nombre rationnel) que si x est la n -ième puissance d'un nombre rationnel.

En fait, la deuxième propriété résulte de la première, et la première résulte de la deuxième, donc il suffit de garder une seule parmi les deux.

Pour n naturel non nul *pair*, l'opération $\sqrt[n]{}$ sur les nombres rationnels peut aussi être définie par les trois propriétés suivantes :

- (1) $\sqrt[n]{x^n} = x$ si $x \geq 0$,

² La même notation sera utilisée pour les racines *réelles*.

- (2) $(\sqrt[n]{x})^n = x$ si x est la n -ième puissance d'un nombre rationnel,
- (3) la valeur de « $\sqrt[n]{x}$ » n'est définie (comme un nombre rationnel) que si x est la n -ième puissance d'un nombre rationnel.

En fait, la deuxième propriété résulte de la première, et la première résulte de la deuxième, donc il suffit de garder une seule parmi les deux.

Voici quelques identités remarquables pour m et n naturels non nuls, a entier, et x et y rationnels, qui sont satisfaites à la condition que les valeurs des deux membres (des parties gauche et droite) soient définies comme nombres rationnels :

- | | |
|---|--|
| (1) $\sqrt[n]{x^a} = (\sqrt[n]{x})^a,$ | (3) $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y},$ |
| (2) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x},$ | (4) $\sqrt[n]{x/y} = \sqrt[n]{x} / \sqrt[n]{y},$ |
| | (5) $\sqrt[n]{1} = 1, \sqrt[n]{0} = 0.$ |

Exercice. Démontrer ces identités.

Définition. Si n est un nombre naturel non nul, a est un entier, x est un nombre rationnel strictement positif tel que la valeur de « $\sqrt[n]{x^a}$ » soit définie, et $y = \frac{a}{n}$, alors x puissance y est le nombre noté « x^y » et défini par la règle :

$$x^{a/n} \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt[n]{x^a} \quad (\text{si la valeur de « } \sqrt[n]{x^a} \text{ » est définie}).$$

Exercice. Vérifier si toutes les définitions données sont correctes et cohérentes entre elles.

Exercice. Calculer : $8^{2/3}$, $8^{-2/3}$, $9^{1,5}$, $9^{-1,5}$.

Voici quelques identités remarquables pour x et y rationnels *strictement positifs* et pour s et t rationnels, qui sont satisfaites à la condition que les valeurs des deux membres (des parties gauche et droite) soient définies comme nombres rationnels :

- | | | |
|-------------------------|----------------------------|----------------------------|
| (1) $x^{st} = (x^s)^t,$ | (3) $x^{s+t} = x^s x^t,$ | (6) $(xy)^t = x^t y^t,$ |
| (2) $x^1 = x,$ | (4) $x^{s-t} = x^s / x^t,$ | (7) $(x/y)^t = x^t / y^t,$ |
| | (5) $x^0 = 1,$ | (8) $1^t = 1.$ |

Exercice. Démontrer ces identités.

Rapport aux relations d'ordre usuelles

Proposition. Pour tous nombres rationnels strictement positifs x et y et pour tout nombre rationnel t tels que les valeurs de « x^t » et de « y^t » soient définies comme nombres rationnels, on a :

- (1) si $x < y$ et $t > 0$, alors $x^t < y^t$, (2) si $x < y$ et $t < 0$, alors $x^t > y^t$.

Exercice. Prouver cette proposition.

Proposition. Pour tous nombres rationnels s et t et pour tout nombre rationnel strictement positif x tels que les valeurs de « x^s » et de « x^t » soient définies comme nombres rationnels, on a :

- (1) si $s < t$ et $x > 1$, alors $x^s < x^t$, (2) si $s < t$ et $x < 1$, alors $x^s > x^t$.

Exercice. Prouver cette proposition.

III.9. Systèmes de numération positionnels n -aires

En utilisant un *système de numération positionnel n -aire*, on peut écrire certains nombres rationnels positifs qui ne sont pas entiers en utilisant une virgule pour indiquer la fin de l'écriture de leur *partie entière*. Par exemple, en décimal :

$$\begin{aligned}\frac{1}{10} &= 0,1 &= 0 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1}, \\ \frac{3}{4} &= \frac{75}{100} = 0,75 &= 0 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}, \\ \frac{6}{5} &= \frac{12}{10} = 1,2 &= 1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1},\end{aligned}$$

et en base 3 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= \frac{1_3}{10_3} = 0,1_3 &= 0 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^{-1}, \\ \frac{5}{9} &= \frac{12_3}{100_3} = 0,12_3 &= 0 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2}, \\ \frac{7}{3} &= \frac{21_3}{10_3} = 2,1_3 &= 2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^{-1}.\end{aligned}$$

Cependant, on ne peut pas écrire $1/3$ en décimal, ni $1/2$ en base 3.

III.10. Nombres n -aires

Définition. Soit $n > 1$ un nombre naturel. Un nombre rationnel est dit *n -aire* si et seulement si il est de la forme a/n^m avec m naturel et a entier.

Comme dans les autres contextes, on utilise d'habitude les adjectifs « *binaire* », « *ternaire* », « *quaternaire* » au lieu de « deux-aire », « trois-aire », « quatre-aire », et ainsi de suite.

En particulier, un nombre rationnel est dit

- *binaire* si et seulement si il est de la forme $a/2^n$ avec n naturel et a entier,
- *ternaire* si et seulement si il est de la forme $a/3^n$ avec n naturel et a entier,
- *quaternaire* si et seulement si il est de la forme $a/4^n$ avec n naturel et a entier,
- *octal* si et seulement si il est de la forme $a/8^n$ avec n naturel et a entier,
- *décimal* si et seulement si il est de la forme $a/10^n$ avec n naturel et a entier,
- *hexadécimal* si et seulement si il est de la forme $a/16^n$ avec n naturel et a entier.

Exemples. Le nombre $1/2$ est binaire et quaternaire, ainsi que décimal, mais il n'est pas ternaire. En effet :

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^1} = \frac{2}{4^1} = \frac{5}{10^1},$$

mais il est impossible d'écrire $1/2$ sous la forme « $a/3^n$ » avec n naturel et a entier. Le nombre $2/3$ est ternaire, mais il n'est pas binaire, ni quaternaire, ni décimal.

Tout nombre entier est binaire, ternaire, quaternaire, et ainsi de suite. En effet, quels que soient un nombre naturel $m > 1$ et un nombre entier a , $a = a/m^0$.

Exercice. Parmi les nombres suivants, déterminer lesquels sont binaires, lesquels sont ternaires, et lesquels sont décimaux : $3/4$, $-4/5$, $1,5$, $0,33$.

Proposition. Soit $n > 1$ un nombre naturel. Soient x et y deux nombres rationnels n -aires. Alors les nombres $x + y$, $x - y$ et xy sont tous n -aires.

Exercice. Prouver cette proposition.

En particulier, la somme, la différence et le produit de deux nombres décimaux sont décimaux.

Proposition. Soit $n > 1$ un nombre naturel. Alors un nombre rationnel est n -aire si et seulement si il peut être écrit en système de numération positionnel n -aire (avec un nombre fini de chiffres après la virgule).

Exercice. Prouver cette proposition.

En particulier, un nombre rationnel est décimal si et seulement si il peut être écrit en système de numération arabe occidental (avec un nombre fini de chiffres après la virgule).

III.11. Logarithmes

Définition. Si x et y sont nombres rationnels strictement positifs et $x \neq 1$, alors l'unique nombre rationnel z tel que $x^z = y$ (si un tel z existe) est dit le *logarithme* de y en base x et est noté « $\log_x y$ ».

Cette définition de $\log_x$ (pour x strictement positif et différent de 1) peut être exprimée par l'équivalence suivante :

$$\log_x y = z \quad \Leftrightarrow \quad y = x^z.$$

Pour x strictement positif et différent de 1, l'opération $\log_x$ sur les nombres rationnels peut aussi être définie par les trois propriétés suivantes :

- (1) $\log_x x^y = y$,
- (2) $x^{\log_x y} = y$ si y est une puissance rationnelle de x ,
- (3) la valeur de « $\log_x y$ » n'est définie (comme un nombre rationnel) que si y est une puissance rationnelle de x .

En fait, la deuxième propriété résulte de la première, et la première résulte de la deuxième, donc il suffit de garder une seule parmi les deux.

Exercice. Calculer :

$$\log_3 3, \quad \log_2 4, \quad \log_4 2, \quad \log_{10} 1\,000, \quad \log_{10} 1\,000\,000, \quad \log_{10} 0,001.$$

Voici quelques identités remarquables qui sont satisfaites pour tous nombres rationnels x, y, z, w, t , tels que $x > 0, y > 0, z > 0, w > 0, x \neq 1, y \neq 1$, à la condition que les valeurs des deux membres (des parties gauche et droite) soient définies comme nombres rationnels :

- (1) $(\log_x y)(\log_y z) = \log_x z$,
- (2) $(\log_x y)(\log_y x) = 1$,
- (3) $\log_x x = 1$,
- (4) $\log_x zw = \log_x z + \log_x w$,
- (5) $\log_x \frac{z}{w} = \log_x z - \log_x w$,
- (6) $\log_x 1 = 0$.

Exercice. Démontrer ces identités.

III.12. Décomposition en une somme de nombres plus « simples »

Lemme. Si a et b sont deux nombres entiers non nuls premiers entre eux, alors il existe deux nombres entiers c et d tels que

$$\frac{1}{ab} = \frac{c}{a} + \frac{d}{b}.$$

Démonstration. Soient a et b deux nombres entiers non nuls premiers entre eux. Appliquons le lemme de Bézout à a et b . Soient alors c et d deux nombres entiers tels que $1 = bc + ad$ (ils existent d'après le lemme de Bézout). Alors

$$\frac{1}{ab} = \frac{bc + ad}{ab} = \frac{c}{a} + \frac{d}{b}. \quad \square$$

En utilisant ce lemme, on peut prouver que tout nombre rationnel non entier peut être écrit comme la somme d'un entier et d'une ou de plusieurs fractions de la forme « r/p^m », où p, r, m sont des nombres naturels non nuls, p est premier, et $r < p$, de manière que les dénominateurs des fractions qui apparaissent dans la somme soient deux à deux distincts.

Exemple. Voici une telle décomposition de $11/36$:

$$\frac{11}{36} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} - 1.$$

En fait, on peut prouver le théorème suivant :

Théorème. Si $p_1, \dots, p_n$ sont n nombres naturels premiers et deux à deux distincts, $m_1, \dots, m_n$ sont n nombres naturels non nuls, et que a est un nombre entier, alors il existe une famille de $m_1 + \dots + m_n$ nombres naturels $r_{1,1}, \dots, r_{1,m_1}, \dots, r_{n,1}, \dots, r_{n,m_n}$ et un nombre entier b tels que $r_{i,j} < p_i$ pour tout i de 1 à n et pour tout j de 1 à m_i , et que

$$\frac{a}{p_1^{m_1} \cdots p_n^{m_n}} = \frac{r_{1,1}}{p_1} + \dots + \frac{r_{1,m_1}}{p_1^{m_1}} + \dots + \frac{r_{n,1}}{p_n} + \dots + \frac{r_{n,m_n}}{p_n^{m_n}} + b.$$

En plus, sous ces conditions, il n'y a qu'un seul choix possible de $r_{1,1}, \dots, r_{1,m_1}, \dots, r_{n,1}, \dots, r_{n,m_n}$ (et de b).

Exemple. Quel que soit un nombre entier a , il existe des entiers $r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,1}, r_{2,2}$ et b tels que

$$\begin{aligned} \frac{a}{100} &= \frac{a}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{r_{1,1}}{2^1} + \frac{r_{1,2}}{2^2} + \frac{r_{2,1}}{5^1} + \frac{r_{2,2}}{5^2} + b \\ &= \frac{r_{1,1}}{2} + \frac{r_{1,2}}{4} + \frac{r_{2,1}}{5} + \frac{r_{2,2}}{25} + b, \end{aligned}$$

avec

$$0 \leq r_{1,1} < 2, \quad 0 \leq r_{1,2} < 2, \quad 0 \leq r_{2,1} < 5, \quad 0 \leq r_{2,2} < 5.$$

Par exemple :

$$\frac{1}{100} = \frac{0}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{5} + \frac{4}{25} - 1,$$

$$\frac{3}{100} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{25} - 1,$$

$$\frac{5}{100} = \frac{0}{2} + \frac{1}{4} + \frac{4}{5} + \frac{0}{25} - 1,$$

$$\frac{7}{100} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{3}{25} - 1,$$

$$\frac{9}{100} = \frac{0}{2} + \frac{1}{4} + \frac{4}{5} + \frac{1}{25} - 1,$$

$$\frac{2}{100} = \frac{1}{2} + \frac{0}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{25} - 1,$$

$$\frac{4}{100} = \frac{0}{2} + \frac{0}{4} + \frac{0}{5} + \frac{1}{25},$$

$$\frac{6}{100} = \frac{1}{2} + \frac{0}{4} + \frac{2}{5} + \frac{4}{25} - 1,$$

$$\frac{8}{100} = \frac{0}{2} + \frac{0}{4} + \frac{0}{5} + \frac{2}{25},$$

$$\frac{10}{100} = \frac{1}{2} + \frac{0}{4} + \frac{3}{5} + \frac{0}{25} - 1.$$

En plus, pour un nombre a donné, il n'y a qu'un seul choix possible de $r_{1,1}$, $r_{1,2}$, $r_{2,1}$, $r_{2,2}$ (et de b).