Géométrie analytique 1

Alexey Muranov

15 octobre 2025

Table des matières

Introduction

On admet la connaissance par le lecteur des éléments de la *géométrie euclidienne classique* (aussi dite la *géométrie synthétique*).

En géométrie euclidienne classique, les objets géométriques de base sont les *points* et les *droites*, qui se trouvent dans un *plan euclidien* ou dans un *espace euclidien* 3-*dimensionnel*. On peut étudier les positions relatives des points et des droites, évaluer les *distances* entre des points et les *angles* entre des droites ou *demi-droites* (*rayons*). En utilisant les points, les droites, et les notions de distance et d'angle, on peut définir des *figures géométriques*, telles que *triangles* et *cercles*.

En géométrie classique, les calculs au sens algébrique sont d'habitude limités aux calculs des longueurs et des angles, et on raisonne avec des relations entre des objets plutôt qu'avec des opérations sur des objets.

En revanche, en *géométrie analytique*, on utilise plutôt des opérations que des relations, et on calcule avec des *coordonnées* ainsi qu'avec des *vecteurs*.

Les droites, les plans, et les figures géométriques en géométrie analytique son souvent confondus avec les ensembles de leurs points. Des ensembles de vecteurs jouent également un rôle important en géométrie analytique.

Dans la suite, on va parler des points, des droites, et des autres objets géométrique situés sur/dans une même droite, un même plan ou un même espace tridimensionnel.

I. Espaces affines et espaces vectoriels

Commençons par étudier de manière analytique la partie de la géométrie classique qui ne tient pas compte des longueurs ni des angles. Les objets élémentaires de l'étude seront les points et les *vecteurs géométriques libres*.

I.1. Qu'est-ce que c'est, un vecteur géométrique libre ?

Notation. Si A et B sont deux points distincts, on va noter « (AB) » la droite qui passe par A et B, et on va noter « $[AB]$ » le segment de la droite (AB) entre A et B. On peut aussi considérer le segment « dégénéré » réduit au point A tout seul et noté « $[AA]$ ».

Définition. On définit les *vecteurs géométriques liés* ainsi :

(1) à tout couple de points (A, B), on associe un *vecteur géométrique lié*, noté « $\overrightarrow{[AB]}$ » ;

(2) si A, B, C, D sont quatre points, on admet que le *vecteur géométrique lié* $\overrightarrow{[CD]}$ est le même que $\overrightarrow{[AB]}$ si et seulement si $C = A$ et $D = B$:

$$\overrightarrow{[CD]} = \overrightarrow{[AB]} \quad \Leftrightarrow \quad (C, D) = (A, B)\,;$$

(3) tout *vecteur géométrique lié* est de la forme $\overrightarrow{[AB]}$, où A et B sont deux points.

Les vecteurs géométriques liés sont faciles à définir, mais on ne va pas s'en servir car ils sont moins pratiques à travailler avec que les *vecteurs géométriques libres* qu'on va définir et étudier dans la suite. Afin de pouvoir définir les vecteurs géométriques libres, on introduit la relation d'*équipollence* entre des couples de points.

Définition. La relation d'*équipollence* ($\mathrel{\hat=}$) entre deux couples de points (A, B) et (C, D) est définie par l'équivalence suivante :

$$(A, B) \mathrel{\hat=} (C, D) \quad \Leftrightarrow \quad \text{le milieu de } [BC] \text{ coïncide avec le milieu de } [DA].$$

Notons que, d'après cette définition,

$$\begin{aligned} (A, B) \mathrel{\hat=} (C, D) \quad &\Leftrightarrow \quad (B, A) \mathrel{\hat=} (D, C) \\ &\Leftrightarrow \quad (A, C) \mathrel{\hat=} (B, D) \quad \Leftrightarrow \quad (C, A) \mathrel{\hat=} (D, B). \end{aligned}$$

Proposition. *Soient A, B, C, D quatre points tels que $(A, B) \mathrel{\hat=} (C, D)$.*

(1) *Si $A \neq B$, alors $C \neq D$ et les droites (AB) et (CD) sont parallèles ou confondues.*

(2) *Si $A \neq C$, alors $B \neq D$ et les droites (AC) et (BD) sont parallèles ou confondues.*

Exercice. Prouver cette proposition.

Les trois propriétés suivantes de la relation $(\doteqdot)$ sont d'une importance particulière pour la définition des vecteurs géométriques libres :

(1) si $(A, B) \doteqdot (C, D)$ et $(C, D) \doteqdot (E, F)$, alors $(A, B) \doteqdot (E, F)$,

(2) $(A, B) \doteqdot (A, B)$,

(3) si $(A, B) \doteqdot (C, D)$, alors $(C, D) \doteqdot (A, B)$.

La propriété (1) est dite la *transitivité* de $(\doteqdot)$, la propriété (2) est dite la *réflexivité* de $(\doteqdot)$, et la propriété (3) est dite la *symétrie* de $(\doteqdot)$.

La réflexivité et la symétrie de $(\doteqdot)$ sont presque évidentes, mais pas la transitivité. Pour démontrer que $(\doteqdot)$ est transitive (la propriété (1)), on peut utiliser le lemme suivant.

Lemme. *Soient A, B, C, D quatre points quelconques, et soient M_{AB} le milieu de $[AB]$, M_{BC} le milieu de $[BC]$, M_{CD} le milieu de $[CD]$, et M_{DA} le milieu de $[DA]$. Alors le milieu de $[M_{AB}M_{CD}]$ coïncide avec le milieu de $[M_{BC}M_{DA}]$.*

Admettons ce lemme sans démonstration et utilisons le pour en déduire la transitivité de $(\doteqdot)$.

Proposition. *Soient A, B, C, D, E, F six points tels que $(A, B) \doteqdot (C, D)$ et $(C, D) \doteqdot (E, F)$. Alors $(A, B) \doteqdot (E, F)$.*

Démonstration. Posons G le milieu de $[BC]$, lequel coïncide avec le milieu de $[DA]$, et H le milieu de $[DE]$, lequel coïncide avec le milieu de $[FC]$. Posons K le milieu de $[GH]$.

Posons M_{DC} le milieu de $[DC]$, M_{BE} le milieu de $[BE]$, et M_{FA} le milieu de $[FA]$. Le but est de prouver que $M_{BE} = M_{FA}$.

En appliquant le lemme précédent aux quatre points B, E, D, C, on trouve que le milieu de $[M_{BE}M_{DC}]$ coïncide avec le milieu de $[HG]$, c'est-à-dire, avec K.

En appliquant le lemme précédent aux quatre points F, A, D, C, on trouve que le milieu de $[M_{FA}M_{DC}]$ coïncide avec le milieu de $[GH]$, c'est-à-dire, avec K.

Ainsi, les milieux de $[M_{BE}M_{DC}]$ et de $[M_{FA}M_{DC}]$ coïncident. D'où, $M_{BE} = M_{FA}$. □

Le lemme suivant est à la fois utile et facile à démontrer.

Lemme. (1) *Si A, B, C sont trois points tels que $(A, B) \doteqdot (A, C)$, alors $B = C$.*

(2) *Si A, B, C sont trois points tels que $(A, C) \doteqdot (B, C)$, alors $A = B$.*

Ayant étudié la relation d'équipollence $(\doteqdot)$, on s'en sert maintenant pour définir les vecteurs géométriques libres.

Définition. On définit les *vecteurs géométriques libres* ainsi :

(1) à tout couple de points (A, B), on associe un *vecteur géométrique libre*, noté « $\overrightarrow{AB}$ » ;

(2) si A, B, C, D sont quatre points, on admet que le *vecteur géométrique libre* $\overrightarrow{CD}$ est le même que $\overrightarrow{AB}$ si et seulement si $(C, D) \doteqdot (A, B)$:

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad (C, D) \doteqdot (A, B) ;$$

(3) tout *vecteur géométrique libre* est de la forme $\overrightarrow{AB}$, où A et B sont deux points.

Exercice. Soient A, B, O trois points. Montrer que O est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB}$.

Définition. Pour deux points A et B, le vecteur géométrique libre $\overrightarrow{AB}$ peut être noté « $B - A$ » et peut être dit la *différence* de B et A :

$$B - A \overset{\text{déf}}{=} \overrightarrow{AB}.$$

Notation. Si E est une droite, un plan ou un espace, alors l'ensemble des vecteurs géométriques libres de E est parfois noté « $\vec{\mathsf{E}}$ ».

Lorsque il n'y a pas d'ambiguïté, on va appeler les vecteurs géométriques libres les *vecteurs* tout court.

I.2. Vecteur nul, vecteur opposé

Exercice. Soient A et B deux points d'une même droite, d'un même plan ou d'un même espace. Montrer que $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$.

Définition. Si E est une droite, un plan ou un espace, le *vecteur nul* de E est le vecteur $\overrightarrow{AA}$, où A est un point arbitraire de E.

Notation. Le vecteur nul d'une droite, d'un plan ou d'un espace E peut être noté « $\vec{\mathbf{0}}_{\mathsf{E}}$ », ou « $\mathbf{0}_{\mathsf{E}}$ », ou tout simplement « $\vec{\mathbf{0}}$ », ou « $\mathbf{0}$ ».

Exercice. Soient A, B, C, D quatre points tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Montrer que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$.

Définition. Le vecteur *opposé* d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$.

Ainsi, en particulier, l'opposé de $\vec{\mathbf{0}}$ est $\vec{\mathbf{0}}$.

Exercice. Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur qui est son propre opposé. Montrer que $\boldsymbol{x} = \vec{\mathbf{0}}$.

I.3. Translation d'un point par un vecteur

Définition. Si A et B sont deux points et que $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{AB}$, alors le *translaté* de A par le vecteur $\boldsymbol{x}$, noté « $A + \boldsymbol{x}$ », est B :

$$A + \overrightarrow{AB} \stackrel{\text{déf}}{=} B.$$

Le translaté d'un point A par un vecteur $\boldsymbol{x}$ peut aussi être appelé la *somme* de A et $\boldsymbol{x}$.

Ainsi, si A et B sont deux points, alors

$$A + (B - A) = A + \overrightarrow{AB} = B.$$

Si A est un point et $\boldsymbol{x}$ est un vecteur, alors on peut montrer que

$$(A + \boldsymbol{x}) - A = \overrightarrow{A(A + \boldsymbol{x})} = \boldsymbol{x}.$$

Exercice. Montrer le.

Si $\boldsymbol{x}$ est un vecteur, l'opération qui à tout point associe son translaté par $\boldsymbol{x}$ est dite la *translation par* le vecteur $\boldsymbol{x}$, ou *translation de* vecteur $\boldsymbol{x}$.

Définition. Si A et B sont deux points et que $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{BA}$, alors le *translaté inverse* de A par le vecteur $\boldsymbol{x}$, noté « $A - \boldsymbol{x}$ », est B :

$$A - \overrightarrow{BA} \stackrel{\text{déf}}{=} B.$$

Le translaté inverse d'un point A par un vecteur $\boldsymbol{x}$ peut aussi être appelé la *différence* de A et $\boldsymbol{x}$.

Ainsi, si A et B sont deux points, alors

$$A - (A - B) = A - \overrightarrow{BA} = B.$$

Si A est un point et $\boldsymbol{x}$ est un vecteur, alors on peut montrer que

$$A - (A - \boldsymbol{x}) = \overrightarrow{(A - \boldsymbol{x})A} = \boldsymbol{x}.$$

Exercice. Montrer le.

Si $\boldsymbol{x}$ est un vecteur, l'opération qui à tout point associe son translaté inverse par $\boldsymbol{x}$ est dite la *translation inverse par* le vecteur $\boldsymbol{x}$, ou *translation inverse de* vecteur $\boldsymbol{x}$.
Les deux identités suivantes sont satisfaites pour tout point A et pour tout vecteur $\boldsymbol{x}$:

(1) $(A + \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x} = A$,

(2) $(A - \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = A$.

I.4. Addition et soustraction de vecteurs

D'après la définition des translatés, quels que soient trois points A, B, C, on a :

$$A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = B + \overrightarrow{BC} = C = A + \overrightarrow{AC}.$$

Cette observation suggère qu'il est naturel de définir l'opération d'*addition* (+) des vecteurs de telle manière que pour tous points A, B, C, on ait l'égalité :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Pour voir si on peut imposer cette identité comme la définition de l'addition de vecteurs, il suffit de vérifier si pour tous points A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 tels que $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$ et $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{B_2C_2}$, on a $\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_2C_2}$. D'après le lemme suivant, c'est le cas.

Lemme. *Soient six points* A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 *tels que* $(A_1, B_1) \doteq (A_2, B_2)$ *et* $(B_1, C_1) \doteq (B_2, C_2)$. *Alors* $(A_1, C_1) \doteq (A_2, C_2)$.

Démonstration. Comme $(A_1, B_1) \doteq (A_2, B_2)$, on en déduit que $(A_1, A_2) \doteq (B_1, B_2)$. Comme $(B_1, C_1) \doteq (B_2, C_2)$, on en déduit que $(B_1, B_2) \doteq (C_1, C_2)$. Ainsi, $(A_1, A_2) \doteq (C_1, C_2)$. D'où, $(A_1, C_1) \doteq (A_2, C_2)$. □

Définition. Si A, B, C sont trois points, $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{AB}$ et $\boldsymbol{y} = \overrightarrow{BC}$, alors la *somme* des vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$, notée « $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ », est $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \stackrel{\text{déf}}{=} \overrightarrow{AC}.$$

Exercice. Montrer, en utilisant le dernier lemme, que cette définition est correcte (au sens d'être cohérente). Vérifier en plus qu'elle est complète, c'est-à-dire, qu'elle définit la somme de deux n'importe quels vecteurs.

Voici les trois identités les plus importantes satisfaites par l'opération d'addition des vecteurs :

(1) $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$,

(2) $\boldsymbol{x} + \vec{\mathbf{0}} = \boldsymbol{x} = \vec{\mathbf{0}} + \boldsymbol{x}$,

(3) $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.

Exercice. Vérifier ou observer ces identités sur un dessin.

Proposition. *Soient* $\boldsymbol{x}$ *et* $\boldsymbol{y}$ *deux vecteurs d'une même droite, d'un même plan ou d'un même espace* E. *Alors* $\boldsymbol{x}$ *et* $\boldsymbol{y}$ *sont opposés l'un de l'autre si et seulement si* $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \vec{\mathbf{0}}_{\mathsf{E}}$.

Exercice. Prouver cette proposition.

Définition. L'opération de *soustraction* des vecteurs est définie par l'équivalence suivante :

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{x}.$$

Une autre façon de définir la soustraction des vecteurs est par les deux identités suivantes :

(1) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$,

(2) $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$.

En fait, on peut montrer que n'importe quelle de ces deux identités suffit toute seule.

Notation. L'expression « $+\boldsymbol{x}$ » veut dire $\vec{\mathbf{0}}+\boldsymbol{x}$ $(=\boldsymbol{x})$. L'expression « $-\boldsymbol{x}$ » veut dire $\vec{\mathbf{0}}-\boldsymbol{x}$.

Ainsi, $-\boldsymbol{x}$ est le vecteur opposé de $\boldsymbol{x}$ (et $\boldsymbol{x}$ est le vecteur opposé de $-\boldsymbol{x}$).

I.5. Multiplication et division de vecteurs par des scalaires

Dans le contexte du calcul vectoriel, on appelle *scalaires* les nombres par lesquels les vecteurs peuvent être *multipliés*.

Définition. (1) Si n est un nombre naturel et $\boldsymbol{x}$ est un vecteur, alors le *produit* $n\boldsymbol{x}$ est défini par la règle :

$$n\boldsymbol{x} \overset{\text{déf}}{=} \vec{\mathbf{0}}\underbrace{+\boldsymbol{x}+\cdots+\boldsymbol{x}}_{n\text{ fois}}.$$

(2) Si m et n sont naturels, $\boldsymbol{x}$ est un vecteur, et $a=n-m$, alors le *produit* $a\boldsymbol{x}$ est défini par la règle :

$$(n-m)\boldsymbol{x} \overset{\text{déf}}{=} n\boldsymbol{x}-m\boldsymbol{x}.$$

(3) Si a est un nombre entier non nul et $\boldsymbol{x}$ est un vecteur, alors le *quotient* $\boldsymbol{x}/a$ est défini par l'équation :

$$a\frac{\boldsymbol{x}}{a}=\boldsymbol{x}.$$

(4) Si a est un entier non nul, b est un entier, $\boldsymbol{x}$ est un vecteur, et $q=b/a$, alors le *produit* $q\boldsymbol{x}$ est défini par la règle :

$$\frac{b}{a}\boldsymbol{x} \overset{\text{déf}}{=} \frac{b\boldsymbol{x}}{a}=b\frac{\boldsymbol{x}}{a}.$$

(5) Si α est un nombre réel et $\boldsymbol{x}$ est un vecteur, alors le *produit* $\alpha\boldsymbol{x}$ est défini par la condition :

> pour tous nombres rationnels p et q tels que $p\leqslant\alpha\leqslant q$, si O, A, P, Q sont quatre points tels que $\overrightarrow{OA}=\alpha\boldsymbol{x}$, $\overrightarrow{OP}=p\boldsymbol{x}$, $\overrightarrow{OQ}=q\boldsymbol{x}$, alors le point A se trouve sur le segment $[PQ]$.

(6) Si α est un nombre réel non nul et $\boldsymbol{x}$ est un vecteur, alors le *quotient* $\boldsymbol{x}/\alpha$ est défini par l'équation :

$$\alpha\frac{\boldsymbol{x}}{\alpha}=\boldsymbol{x}.$$

Notation. Le produit d'un vecteur $\boldsymbol{x}$ et d'un nombre α peut être noté « $\alpha\boldsymbol{x}$ » ou « $\boldsymbol{x}\alpha$ ».

On va admettre sans démonstration que les définitions données ci-dessus de la multiplication d'un vecteur par un réel et de la division d'un vecteur par un réel non nul sont correctes et complètes. Cela implique en particulière qu'on admet que le produit d'un vecteur non nul avec un réel non nul est un vecteur non nul : pour tout vecteur $\boldsymbol{x}\neq\vec{\mathbf{0}}$ et pour tout réel $\alpha\neq 0$, on a que $\alpha\boldsymbol{x}\neq\vec{\mathbf{0}}$.

Les identités suivantes sont satisfaites :

(1) $(\beta\alpha)\boldsymbol{x}=\beta(\alpha\boldsymbol{x})$,

(2) $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$,

(3) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$,

(4) $(\alpha-\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}-\beta\boldsymbol{x}$,

(5) $0\boldsymbol{x}=\vec{\mathbf{0}}$,

(6) $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$,

(7) $\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{y}$,

(8) $\alpha\vec{\mathbf{0}}=\vec{\mathbf{0}}$.

Définition. Si $\boldsymbol{x}$ est un vecteur non nul, α est un nombre réel, et $\boldsymbol{y}=\alpha\boldsymbol{x}$, alors définissons le *quotient* $\boldsymbol{y}/\boldsymbol{x}$ comme α :

$$\frac{\alpha\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}} \overset{\text{déf}}{=} \alpha \qquad (\text{si } \boldsymbol{x}\neq\vec{\mathbf{0}}).$$

Remarque. L'opération de division d'un vecteur par un autre est peu courante et rarement utilisée en pratique.

I.6. Axiomes et propriétés d'un espace vectoriel abstrait

Les vecteurs géométriques libres d'une droite, d'un plan ou d'un espace forment ce qui s'appelle un *espace vectoriel* (réel).

Définition. Un *espace vectoriel réel*[1] est un ensemble V muni :

(1) d'une opération d'*addition*, qui à deux éléments $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ de V associe leur somme $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in\mathsf{V}$,

(2) d'un élément *nul* $\vec{\mathbf{0}}\in\mathsf{V}$,

(3) d'une opération de *soustraction*, qui à deux éléments $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ de V associe leur différence $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\in\mathsf{V}$,

(4) d'une operation de *multiplication* par des nombres réel, qui à un élément $\boldsymbol{x}$ de V et à un nombre réel α associe un élément $\alpha\boldsymbol{x}\in\mathsf{V}$ (aussi noté « $\boldsymbol{x}\alpha$ »),

tel que les identités suivantes soient satisfaites, pour tous $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathsf{V}$ et $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$:

(1) $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$,

(2) $\boldsymbol{x} + \vec{\mathbf{0}} = \boldsymbol{x} = \vec{\mathbf{0}} + \boldsymbol{x}$,

(3) $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}$,

(4) $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$,

(5) $(\beta\alpha)\boldsymbol{x} = \beta(\alpha\boldsymbol{x})$,

(6) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$,

(7) $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$,

(8) $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$.

Les éléments d'un espace vectoriel sont dits *vecteurs*.

Les 8 propriétés qui font partie de la définition d'un espace vectoriel réel (abstrait) sont dites *axiomes*.[2] Lorsque on considère un espace vectoriel réel abstrait, on *admet* que les axiomes soient satisfaits, car ils font partie de la définition.

Les vecteurs géométriques libres d'une droite, d'un plan ou d'un espace forment un exemple « concret » d'un espace vectoriel réel abstrait. (Pour le montrer, on doit vérifier que les 8 axiomes sont satisfaits.)

Un autre exemple « concrete » d'un espace vectoriel réel est l'ensemble des nombres réels $\mathbf{R}$. Il est en effet facile de vérifier que l'ensemble $\mathbf{R}$ muni de ses opérations d'addition et de soustraction, de son élément 0, et de l'opération de multiplication des réels par des réels, satisfait les 8 axiomes.

Parmi d'autres exemples courants des espaces vectoriels réels il y a :

(1) l'ensemble $\mathbf{R}^2$ des couples de réels, l'ensemble $\mathbf{R}^3$ des triples de réels, ainsi que les ensembles $\mathbf{R}^4$, $\mathbf{R}^5$, $\mathbf{R}^6$, et ainsi de suite.

(2) l'ensemble $\mathbf{C}$ des *nombres complexes*,

(3) l'ensemble $\mathbf{R}[X]$ des *polynômes* à coefficients réels en une *indéterminée* X.

Plus précisément, pour chacun de ces ensembles, si on le munira des opérations d'addition et de soustraction, de l'élément nul, et de l'opération de multiplication par des réels d'une manière « naturelle », on pourra montrer que les 8 axiomes d'un espace vectoriel réel seront satisfaits.

À partir des 8 axiomes d'un espace vectoriel, on peut déduire d'autres propriétés, dont les suivantes :

(1) $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = \vec{\mathbf{0}}$,

(2) $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + (\vec{\mathbf{0}} - \boldsymbol{y})$,

(3) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$,

(4) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z})$,

(5) $0\boldsymbol{x} = \vec{\mathbf{0}}$,

(6) $(\alpha - \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} - \beta\boldsymbol{x}$,

(7) $\alpha\vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}}$,

(8) $\alpha(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{y}$.

[1] De la même manière on peut définir les espaces vectoriels *rationnels* ou les espaces vectoriels *complexes*. En fait, pour le faire, il suffit de remplacer dans cette définition toute mention des nombres réels par une mention appropriée des rationnels ou des complexes (remplacer « $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ » par « $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}$ » ou « $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ »).

[2] En général, lorsque on définit une *structure algébrique* abstraite, les propriétés qui font partie de sa définition sont dites *axiomes*.

En effet :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} &\overset{(2)}{=} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}) + \vec{\mathbf{0}} \\
&\overset{(3)}{=} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x} + (\vec{\mathbf{0}} - \boldsymbol{x})) \\
&\overset{(1)}{=} ((\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}) + (\vec{\mathbf{0}} - \boldsymbol{x}) \overset{(3)}{=} \boldsymbol{x} + (\vec{\mathbf{0}} - \boldsymbol{x}) \overset{(3)}{=} \vec{\mathbf{0}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} &\overset{(2)}{=} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + \vec{\mathbf{0}} \\
&\overset{(3)}{=} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y} + (\vec{\mathbf{0}} - \boldsymbol{y})) \\
&\overset{(1)}{=} ((\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y}) + (\vec{\mathbf{0}} - \boldsymbol{y}) \overset{(3)}{=} \boldsymbol{x} + (\vec{\mathbf{0}} - \boldsymbol{y}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{y} &\overset{(2)}{=} ((\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{y}) + \vec{\mathbf{0}} \\
&\overset{(3)}{=} ((\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y} + (\vec{\mathbf{0}} - \boldsymbol{y})) \\
&\overset{(1)}{=} (((\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y}) + (\vec{\mathbf{0}} - \boldsymbol{y}) \\
&\overset{(3)}{=} (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + (\vec{\mathbf{0}} - \boldsymbol{y}) \\
&\overset{(1)}{=} \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + (\vec{\mathbf{0}} - \boldsymbol{y})) \overset{(3)}{=} \boldsymbol{x} + \vec{\mathbf{0}} \overset{(2)}{=} \boldsymbol{x},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{z} &\overset{(2)}{=} ((\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{z}) + \vec{\mathbf{0}} \\
&\overset{(3)}{=} ((\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{z} + (\vec{\mathbf{0}} - \boldsymbol{z})) \\
&\overset{(1)}{=} (((\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{z}) + \boldsymbol{z}) + (\vec{\mathbf{0}} - \boldsymbol{z}) \\
&\overset{(3)}{=} (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + (\vec{\mathbf{0}} - \boldsymbol{z}) \\
&\overset{(1)}{=} \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + (\vec{\mathbf{0}} - \boldsymbol{z})) \\
&\overset{(3)}{=} \boldsymbol{x} + (((\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}) + \boldsymbol{z}) + (\vec{\mathbf{0}} - \boldsymbol{z})) \\
&\overset{(1)}{=} \boldsymbol{x} + ((\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{z} + (\vec{\mathbf{0}} - \boldsymbol{z}))) \overset{(3)}{=} \boldsymbol{x} + ((\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}) + \vec{\mathbf{0}}) \overset{(2)}{=} \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0\boldsymbol{x} &\overset{(2)}{=} 0\boldsymbol{x} + \vec{\mathbf{0}} \\
&\overset{(3)}{=} 0\boldsymbol{x} + (0\boldsymbol{x} + (\vec{\mathbf{0}} - 0\boldsymbol{x})) \\
&\overset{(1)}{=} (0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x}) + (\vec{\mathbf{0}} - 0\boldsymbol{x}) \\
&\overset{(7)}{=} (0 + 0)\boldsymbol{x} + (\vec{\mathbf{0}} - 0\boldsymbol{x}) = 0\boldsymbol{x} + (\vec{\mathbf{0}} - 0\boldsymbol{x}) \overset{(3)}{=} \vec{\mathbf{0}},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha-\beta)\boldsymbol{x} &\overset{(2)}{=} (\alpha-\beta)\boldsymbol{x}+\vec{\mathbf{0}}\\
&\overset{(3)}{=} (\alpha-\beta)\boldsymbol{x}+(\beta\boldsymbol{x}+(\vec{\mathbf{0}}-\beta\boldsymbol{x}))\\
&\overset{(1)}{=} ((\alpha-\beta)\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x})+(\vec{\mathbf{0}}-\beta\boldsymbol{x})\\
&\overset{(7)}{=} ((\alpha-\beta)+\beta)\boldsymbol{x}+(\vec{\mathbf{0}}-\beta\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{x}+(\vec{\mathbf{0}}-\beta\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{x}-\beta\boldsymbol{x},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha\vec{\mathbf{0}} &\overset{(2)}{=} \alpha\vec{\mathbf{0}}+\vec{\mathbf{0}}\\
&\overset{(3)}{=} \alpha\vec{\mathbf{0}}+(\alpha\vec{\mathbf{0}}+(\vec{\mathbf{0}}-\alpha\vec{\mathbf{0}}))\\
&\overset{(1)}{=} (\alpha\vec{\mathbf{0}}+\alpha\vec{\mathbf{0}})+(\vec{\mathbf{0}}-\alpha\vec{\mathbf{0}})\\
&\overset{(8)}{=} \alpha(\vec{\mathbf{0}}+\vec{\mathbf{0}})+(\vec{\mathbf{0}}-\alpha\vec{\mathbf{0}}) \overset{(2)}{=} \alpha\vec{\mathbf{0}}+(\vec{\mathbf{0}}-\alpha\vec{\mathbf{0}}) \overset{(3)}{=} \vec{\mathbf{0}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) &\overset{(2)}{=} \alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+\vec{\mathbf{0}}\\
&\overset{(3)}{=} \alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+(\alpha\boldsymbol{y}+(\vec{\mathbf{0}}-\alpha\boldsymbol{y}))\\
&\overset{(1)}{=} (\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+\alpha\boldsymbol{y})+(\vec{\mathbf{0}}-\alpha\boldsymbol{y})\\
&\overset{(8)}{=} \alpha((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y})+(\vec{\mathbf{0}}-\alpha\boldsymbol{y}) \overset{(3)}{=} \alpha\boldsymbol{x}+(\vec{\mathbf{0}}-\alpha\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{y}.
\end{aligned}
$$

I.7. Espaces vectoriels $\mathbf{R}^n$

Rappelons nous qu'on note « $\mathbf{R}$ » l'ensemble des nombres réels.

Notation. Si n est un nombre naturel et X est un ensemble (de nombre, ou de points, ou d'autres objets mathématiques), alors on note « X^n » l'ensemble des n-*uples* d'éléments de X.

En particulier, $\mathbf{N}^n$ est l'ensemble des n-uples de nombres naturels, $\mathbf{Z}^n$ est l'ensemble des n-uples d'entiers, $\mathbf{Q}^n$ est l'ensemble des n-uples de rationnels, et $\mathbf{R}^n$ est l'ensemble des n-uples de réels.

Ainsi, $\mathbf{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels, $\mathbf{R}^3$ est l'ensemble des triples de réels, $\mathbf{R}^4$ est l'ensemble des quadruples de réels, et ainsi de suite. L'ensemble $\mathbf{R}^0$ ne contient qu'un seul élément – le 0-uple (). On va éviter de parler de $\mathbf{R}^0$ pour des raisons pédagogiques, car à première vue ce cas peut paraître peu intuitif et différent des autres.

Pour tout nombre naturel non nul n, on va doter $\mathbf{R}^n$ d'une structure d'un espace vectoriel réel. Pour cela il suffit de définir les opérations d'addition et de soustraction, l'élément nul, et l'opération de multiplication par de réels de manière qu'ils satisfont les

8 axiomes. On les définit ainsi :

$$
\begin{aligned}
(\alpha_1,\dots,\alpha_n)+(\beta_1,\dots,\beta_n) &\overset{\text{déf}}{=} (\alpha_1+\beta_1,\,\dots,\,\alpha_n+\beta_n),\\
(\alpha_1,\dots,\alpha_n)-(\beta_1,\dots,\beta_n) &\overset{\text{déf}}{=} (\alpha_1-\beta_1,\,\dots,\,\alpha_n-\beta_n),\\
\vec{\mathbf{0}} &\overset{\text{déf}}{=} (0,\,\dots,\,0),\\
\beta(\alpha_1,\dots,\alpha_n) &\overset{\text{déf}}{=} (\beta\alpha_1,\,\dots,\,\beta\alpha_n).
\end{aligned}
$$

(Ici α_i, β_i, β sont des réels.)

Exemples.

$$
\begin{aligned}
&(1,\,2)+(3,\,4)=(4,\,6)=2(2,\,3),\\
&(1,\,2)-(3,\,4)=(-2,\,-2)=2(-1,\,-1)=(-2)(1,\,1).
\end{aligned}
$$

Exercice. Vérifier que les opérations définies ci-dessus satisfont les 8 axiomes d'un espace vectoriel réel.

Parfois les n-uples de réels sont écrits en colonne,[3] par exemple :

$$
\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix},\qquad \beta\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta\alpha_1\\ \vdots\\ \beta\alpha_n\end{pmatrix}.
$$

I.8. Axiomes et propriétés d'un espace affine abstrait

Les points d'une droite, d'un plan ou d'un espace forment ce qui s'appelle un *espace affine* réel, lorsque on prend en compte les opérations de translation par tous les vecteurs libres.

Définition. Soit V un espace vectoriel. Un *espace affine* de *direction* V est un ensemble E muni :

(1) d'une opération qui à deux éléments A et B de E associe un élément $\overrightarrow{AB}$ de V,

(2) d'une opération qui à un élément $\boldsymbol{x}$ de V et à un élément A de E associe un élément $A+\boldsymbol{x}$ de E,

tel que les identités suivantes soient satisfaites, pour tous $A, B \in \mathsf{E}$ et $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathsf{V}$:

(1) $A+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(A+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{y}$,

(2) $A+\overrightarrow{AB}=B$,

(3) $\overrightarrow{A(A+\boldsymbol{x})}=\boldsymbol{x}$.

[3] En fait, en *calcul matriciel*, suivant les conventions établies, il est souvent pratique d'identifier les éléments de $\mathbf{R}^n$ avec des *matrices-colonnes*.

Les éléments d'un espace affine sont dits *points*. La direction d'un espace affine est aussi dite l'espace vectoriel *associé* à cet espace affine.

On peut interpréter le point écrit « $A + \boldsymbol{x}$ » comme le résultat de la *translation* du point A par le vecteur $\boldsymbol{x}$, et on peut interpréter le vecteur écrit « $\overrightarrow{AB}$ » comme le vecteur par lequel il faut *translater* le point A pour obtenir le point B.

Définition. Pour deux points A et B d'un espace affine, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut être noté « $B - A$ » et peut être dit la *différence* de B et A :

$$B - A \overset{\text{déf}}{=} \overrightarrow{AB}.$$

Notation. Lorsque un ensemble E est traité comme un espace affine, son espace vectoriel associé (sa direction) est parfois noté $\vec{\mathsf{E}}$.

L'ensemble des poins d'une droite, d'un plan ou d'un espace est un exemple d'un espace affine, si comme son espace vectoriel associé on prend l'ensemble des vecteurs géométriques libres de cette droite, ce plan, ou cet espace.

À partir des 3 axiomes d'un espace affine réel et des 8 axiomes d'un espace vectoriel réel, on peut déduire d'autres propriétés, en particulier les suivantes :

(1) $A + \vec{\mathbf{0}} = A$,

(2) $\overrightarrow{AA} = \vec{\mathbf{0}}$,

(3) $\overrightarrow{AB} + \boldsymbol{x} = \overrightarrow{A(B + \boldsymbol{x})}$,

(4) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

En effet :

$$A + \vec{\mathbf{0}} \overset{(2)}{=} (A + \overrightarrow{AA}) + \vec{\mathbf{0}} \overset{(1)}{=} A + (\overrightarrow{AA} + \vec{\mathbf{0}}) = A + \overrightarrow{AA} \overset{(2)}{=} A,$$

$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{A(A + \vec{\mathbf{0}})} \overset{(3)}{=} \vec{\mathbf{0}},$$

$$\underbrace{\overrightarrow{AB} + \boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{y}} \overset{(3)}{=} \overrightarrow{A(A + (\underbrace{\overrightarrow{AB} + \boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{y}}))} \overset{(1)}{=} \overrightarrow{A((A + \overrightarrow{AB}) + \boldsymbol{x})} \overset{(2)}{=} \overrightarrow{A(B + \boldsymbol{x})},$$

$$\underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}_{\boldsymbol{x}} \overset{(3)}{=} \overrightarrow{A(A + (\underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}_{\boldsymbol{x}}))} \overset{(1)}{=} \overrightarrow{A((A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC})} \overset{(2)}{=} \overrightarrow{A(B + \overrightarrow{BC})} \overset{(2)}{=} \overrightarrow{AC}.$$

I.9. Espaces vectoriels vus comme affines

Tout espace vectoriel E peut être vu comme un espace affine. Pour cela on utilise E comme son propre espace vectoriel associé (donc, $\vec{\mathsf{E}} = \mathsf{E}$), et on définit :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}} \overset{\text{déf}}{=} \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \quad \text{pour tous} \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathsf{E}.$$

Ainsi, les éléments d'un espace vectoriel E peuvent être traités comme vecteurs ou comme points, mais l'addition de deux éléments de E donne le même résultat indépendamment si on la regarde comme l'addition de deux vecteurs ou comme l'addition d'un

point et d'un vecteur. Pareil, la soustraction de deux éléments de E donne le même résultat indépendamment si on la regarde comme la soustraction entre deux vecteurs ou entre deux points.

Ainsi on munit chaque ensemble $\mathbf{R}^n$ d'une structure d'un espace affine, en utilisant son structure d'espace vectoriel.

Exemple. Si $A = (1, 2)$ et $B = (3, 4)$ sont deux point de l'espace affine $\mathbf{R}^2$, alors $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 2)$, et c'est un vecteur de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$.

I.10. Ambiguïté de la définition de vecteurs géométriques libres

`SECTION-BROUILLON`

Jusqu'ici dans ce chapitre, on parlait de points et de vecteurs d'une droite, d'un plan, ou d'un espace sans tenir compte qu'une droite peut faire partie d'un plan ou d'un espace, et qu'un plan peut faire partie d'un espace. Ainsi, on n'a pas encore été exposé à une certaine ambiguïté de notre définition de vecteurs géométriques libres.

Considérons, par exemple, une droite D dans un plan P. Considérons deux points A et B dans P qui n'appartiennent pas à D, mais qui se trouvent sur une droite parallèle à D. Posons nous les questions suivantes :

(1) est-ce que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur de D ?

(2) est-ce qu'il existe deux points A' et B' sur D tels que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$?

La définition des vecteurs géométriques libres donnée dans la section I.1 sous-entendait qu'on considérait les points d'une certaine droite, d'un certain plan, ou d'un certain espace. Si on lit cette définition dans le contexte où on considère les points de la droite D, la définition ne dit rien au sujet des points A et B, qui ne sont pas des points de D, et ainsi elle ne permet pas de donner un sens à l'expression « $\overrightarrow{AB}$ ».

Cependant, on peut appliquer la définition des vecteurs géométriques libres au plan P, dans quel cas, selon cette définition, $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur géométrique libre de P, et on peut facilement voir qu'il existe deux points A' et B' sur D tels que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. Ce qui implique que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur de D, alors que ni A, ni B n'appartiennent à D.

On peut donc se demander :

> Est-ce que les vecteurs de la droite D sont propres à D, ou est-ce qu'ils font partie des vecteurs du plan ambiant P ?

Notons, en plus, qu'on peut considérer plusieurs plans différents qui contiennent la même droite D.

La même ambiguïté concerne la notion d'un vecteur d'un plan ou d'un espace. L'origine de cette ambiguïté est la définition de vecteurs géométriques libre *en termes des points*.

Le sens de la définition change si on change le contexte en passant à un plan ou à un espace ambiant, car on considère alors un ensemble différent de points.[4]

Remarque. Cette ambiguïté peut être évitée en adoptant la définition axiomatique de droites, de plans et d'espaces affines, où les vecteurs sont des éléments fondamentaux qui n'ont pas besoin d'être définis séparément. Il faudra alors préciser que lorsqu'on dit, par exemple, qu'une droite affine fait partie d'un plan affine, cela signifie que l'ensemble des points de la droite est inclus dans l'ensemble des points du plan, que l'ensemble des vecteur de la droite est inclus dans l'ensemble des vecteurs du plan, et que certaines propriétés concernant ces inclusions sont satisfaites.[5]

Cependant, cette ambiguïté ne doit pas causer de la confusion en pratique, car le sens des opérations sur des vecteur ne change pas lorsqu'on change le contexte en passant à un plan ou à un espace ambiant.

Par exemple, considérons encore une fois une droite D dans un plan P. Alors on peut démontrer les propositions suivantes :

(1) Soient A, B, C, D quatre points de D. Alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ dans le contexte de P si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ dans le contexte de D.

(2) Soient A et B deux points de D. Alors $\overrightarrow{AB}$ dans le contexte de P est nul si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ dans le contexte de D est nul. (Et c'est si et seulement si $A = B$.)

(3) Soient A, B, C, D, E, F six points de D. Alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ dans le contexte de P si et seulement si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ dans le contexte de D.

(4) Soient α un nombre réel et A, B, C, D quatre points de D. Alors $\alpha\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ dans le contexte de P si et seulement si $\alpha\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ dans le contexte de D.

Exercice. Essayer de comprendre l'ambiguïté de définition des vecteurs géométriques libres, et pourquoi cette ambiguïté peut être tolérée.

I.11. Droites dans un plan ou dans un espace affine

SECTION-BROUILLON

Jusqu'ici dans ce chapitre, on parlait de points et de vecteurs d'une droite, d'un plan, ou d'un espace D sans tenir compte qu'une droite D puisse faire partie d'un plan ou d'un espace E, et qu'un plan D puisse faire partie d'un espace E. Dans cette section on va parler de droites dans un plan ou dans un espace.

[4] Ce problème sera plus éclatant si on adopte une définition courante de vecteurs géométriques libres en termes d'ensembles de couples de points. Selon cette définition, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est l'ensemble de *tous* les couples (A', B') tels que $(A', B') \doteq (A, B)$. Avec cette définition, si A et B sont deux points d'une droite D qui fait partie d'un plan P, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de D et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de P sont deux ensembles différents, dont le premier est inclus dans le second.

[5] Il s'agit de définir la notion d'un *sous-espace affine*.

Définition. Soit D une droite dans un plan ou dans un espace E. Un vecteur $\boldsymbol{u}$ de E est dit un *vecteur de* D si et seulement si il existe deux points A et B de D (pas forcement distincts) tels que $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{u}$.

Un lecteur attentif peut remarquer que la notion d'un vecteur d'une droite est devenue légèrement ambiguë : est-ce que les vecteurs d'une droite sont propres à cette droite, ou est-ce qu'ils font partie des vecteurs d'un plan ou d'un espace ambiant ? En plus, il peut y avoir plusieurs plans qui contiennent une même droite. La même ambiguïté concerne la notion d'un vecteur d'un plan ou d'un espace. Cependant, en pratique cette ambiguïté ne doit pas causer de la confusion.

Exercice. Essayer de comprendre l'ambiguïté de la notion d'un vecteur d'une droite ou d'un plan, et pourquoi cette ambiguïté peut être tolérée.

Considérons un plan ou un espace arbitraire E. On va identifier E avec l'ensemble de ses points, et on va noter « $\vec{\mathsf{E}}$ » l'ensemble des vecteurs de E (donc, $\vec{\mathsf{E}}$ est l'espace vectoriel associé à l'espace affine E). On va utiliser les mêmes conventions pour les droites dans E : si D est une droite dans E, on va identifier D avec l'ensemble des ses points, et on va noter « $\vec{\mathsf{D}}$ » l'ensemble des vecteurs de D (donc, $\vec{\mathsf{D}}$ est l'espace vectoriel associé à l'espace affine D). Ainsi, si D est une droite dans E, alors D fait partie de E et $\vec{\mathsf{D}}$ fait partie de $\vec{\mathsf{E}}$, ce qui peut être écrit ainsi : $\mathsf{D} \subset \mathsf{E}$ et $\vec{\mathsf{D}} \subset \vec{\mathsf{E}}$. (La formule « $X \subset Y$ » veut dire que l'ensemble X est inclus dans l'ensemble Y.)

Certains auteurs appellent l'ensemble $\vec{\mathsf{E}}$ des vecteurs d'une droite, d'un plan ou d'un espace E la *direction* de E.

Proposition. *Soient* E *un plan ou un espace et* D *une droite dans* E. *Comme d'habitude, notons* « $\vec{\mathsf{E}}$ » *l'ensemble des vecteurs de* E *et* « $\vec{\mathsf{D}}$ » *l'ensemble des vecteurs de* D. *Alors :*

(1) *si* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \vec{\mathsf{D}}$, *alors* $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \vec{\mathsf{D}}$,

(2) *si* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \vec{\mathsf{D}}$, *alors* $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in \vec{\mathsf{D}}$,

(3) $\vec{\mathbf{0}}_{\mathsf{E}} = \vec{\mathbf{0}}_{\mathsf{D}} \in \vec{\mathsf{D}}$,

(4) *si* $\alpha \in \mathbf{R}$ *et* $\boldsymbol{u} \in \vec{\mathsf{D}}$, *alors* $\alpha\boldsymbol{u} \in \vec{\mathsf{D}}$,

(5) *si* $A, B \in \mathsf{D}$, *alors* $\overrightarrow{AB} \in \vec{\mathsf{D}}$,

(6) *si* $\boldsymbol{u} \in \vec{\mathsf{D}}$ *et* $A \in \mathsf{D}$, *alors* $A + \boldsymbol{u} \in \mathsf{D}$.

Proposition. *Soient* D *une droite et* $\boldsymbol{u}$ *un vecteur non nul de* D : $\boldsymbol{u} \in \vec{\mathsf{D}}$, $\boldsymbol{u} \neq \vec{\mathbf{0}}$. *Alors pour tout* $\boldsymbol{v} \in \vec{\mathsf{D}}$, *il existe un unique* $\alpha \in \mathbf{R}$ *tel que* $\alpha\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$.

Définition. Tout vecteur non nul d'une droite est dit *vecteur directeur* de cette droite.

Proposition. *Soient A et B deux points distincts et C un point arbitraire. Alors C appartient à la droite (AB) si et seulement si il existe un réel α tel que* $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$. *En plus, C appartient au segment $[AB]$ si et seulement si il existe un réel α tel que* $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$ *et* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Proposition. *Soient A et B deux points distincts et O et C deux points arbitraires. Alors C appartient à la droite (AB) si et seulement si il existe deux nombres réels α et β tels que :*

(1) $\alpha + \beta = 1$,

(2) $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.

En plus, C appartient au segment $[AB]$ si et seulement si il existe deux nombres réels positifs α et β tels que :

(1) $\alpha + \beta = 1$,

(2) $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.

Exercice. Prouver cette proposition.

Proposition. *Soient E un plan ou un espace et A et B deux droites dans E. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(1) $\vec{\mathsf{A}} = \vec{\mathsf{B}}$,

(2) *A et B sont parallèles ou confondus.*

I.12. Points alignés, vecteurs colinéaires

Définition. Des points sont dits *alignés* si et seulement si ils se trouvent sur une même droite.

Proposition. *Si $A_1, \dots, A_n$ sont des points alignés et $\boldsymbol{x}$ est un vecteur, alors les points $A_1 + \boldsymbol{x}, \dots, A_n + \boldsymbol{x}$ sont alignés aussi.*

Exercice. Prouver cette proposition.

Corollaire. *Soient A et B deux points et $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ des vecteurs. Supposons que les points $A + \boldsymbol{x}_1, \dots, A + \boldsymbol{x}_n$ sont alignés. Alors les points $B + \boldsymbol{x}_1, \dots, B + \boldsymbol{x}_n$ sont alignés aussi.*

Définition. Des vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ sont dits *colinéaires* si et seulement si pour tout point A, les $n+1$ points $A, A + \boldsymbol{x}_1, \dots, A + \boldsymbol{x}_n$ sont alignés.

Exercice. Soient A et B deux points différents.

(1) Montrer qu'un point C appartient à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

(2) Montrer qu'un point C appartient à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires.

Lemme. *Soient $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_n$ des vecteurs avec $\boldsymbol{x}$ non nul. Alors ces $n+1$ vecteurs sont colinéaires si et seulement si il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $\boldsymbol{y}_i = \alpha_i\boldsymbol{x}$ pour $i = 1, \dots, n$.*

On va admettre ce lemme sans démonstration.

Exercice. Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs.

(1) Montrer que si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont colinéaires, alors $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ le sont aussi.

(2) Montrer que si $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ sont colinéaires, alors $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ le sont aussi.

I.13. Bases, repères, coordonnées cartésiennes dans un plan

Théorème. *Soient P un plan et $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non colinéaires de P ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \vec{\mathsf{P}}$). Alors pour tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de P ($\boldsymbol{x} \in \vec{\mathsf{P}}$), il existe un unique couple de nombres réels (α, β) tel que $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$. En particulier, si α et β sont deux réels tels que $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} = \vec{\boldsymbol{0}}$, alors $\alpha = \beta = 0$.*

On va admettre ce théorème sans démonstration formelle.

Définition. Soient P un plan et $\vec{\mathsf{P}}$ l'ensemble des vecteur de P. Une *base* de $\vec{\mathsf{P}}$ est un couple de vecteurs non colinéaire de $\vec{\mathsf{P}}$. Si $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ est une base de $\vec{\mathsf{P}}$ et que $\boldsymbol{x} \in \vec{\mathsf{P}}$, alors les *coordonnées cartésiennes* du vecteur $\boldsymbol{x}$ dans la base $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ sont l'unique couple de réels (α, β) tel que $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$.

Exercice. Soient P un plan et $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ une base de $\vec{\mathsf{P}}$. Soient $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ deux vecteurs.

(1) Trouver les coordonnées de $\boldsymbol{x}$ et de $\boldsymbol{y}$ dans la base $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

(2) Trouver les coordonnées de $\boldsymbol{x}$ et de $\boldsymbol{y}$ dans la base $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$.

(3) Montrer que $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ est une base de $\vec{\mathsf{P}}$.

(4) Trouver les coordonnées de $\boldsymbol{a}$ et de $\boldsymbol{b}$ dans la base $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Notation. Si $\mathcal{B} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ est une base de $\vec{\mathsf{P}}$ et $\boldsymbol{x}$ est un élément de $\vec{\mathsf{P}}$, le couple des coordonnées de $\boldsymbol{x}$ dans $\mathcal{B}$ peut être noté « $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$ » ou « ${}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}]$ » ou « $[\boldsymbol{x}]^{\mathcal{B}}$ » ; ici on va adopter la deuxième notation. Ainsi :

$${}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}] = (\alpha, \beta) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}.$$

Exemple. Si $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ est une base et $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$, alors ${}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{w}] = (-1, 2)$.

Les coordonnées des vecteurs peuvent être écrites en colonne, par exemple :

$$\text{« } {}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}] = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ »}$$

(au lieu de « ${}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}] = (\alpha, \beta)$ »).

Les coordonnées des vecteurs dans une base $\mathcal{B}$ *respectent* les opérations vectorielles :

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}] &= {}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}] + {}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{y}], \\ {}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}] &= {}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}] - {}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{y}], \\ {}_{\mathcal{B}}[\vec{\boldsymbol{0}}] &= (0, 0), \\ {}_{\mathcal{B}}[\alpha\boldsymbol{x}] &= \alpha\,{}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}]. \end{aligned}$$

Définition. Soient P un plan et $\vec{\mathsf{P}}$ l'ensemble des vecteur de P. Un *repère* de P est composé d'un point de P, qui est appelé son *origine*, et d'une base de $\vec{\mathsf{P}}$.

On va identifier le repère composé d'une origine A et d'une base $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ au triple $(A, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

Notation. Un repère $(A, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ peut être noté « $A\boldsymbol{uv}$ ».

Un plan P muni d'un repère est dit un *plan cartésien*. On dit aussi qu'un repère donné définit dans P un *système de coordonnés cartésiennes*. En effet, un repère $A\boldsymbol{uv}$ dans P permet d'associer à tout point B de P un unique couple de ses *coordonnées cartésiennes* (α, β) par l'équation

$$\overrightarrow{AB} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}.$$

Définition. Soient P un plan, $A\boldsymbol{uv}$ un repère de P, et B un point de P. Alors les *coordonnées cartésiennes* du point B dans le repère $A\boldsymbol{uv}$ sont l'unique couple de réels (α, β) tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}$.

Ainsi, si P est un plan muni d'un repère $A\boldsymbol{uv}$, et α et β sont réels, alors le point de P de coordonnées (α, β) est le point

$$B = A + \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}.$$

I.14. Représentation paramétrique d'une droite dans un plan

Soient P un plan (affine) et $O\boldsymbol{ab}$ un repère dans P. (Le plan P muni du repère $O\boldsymbol{ab}$ est donc un plan cartésien.)

Soit D une droite (affine) dans P. Soient A un point de D et $\boldsymbol{u}$ un vecteur directeur de D. (Autrement dit : $A \in \mathsf{D}$, $\boldsymbol{u} \in \vec{\mathsf{D}}$, $\boldsymbol{u} \neq \vec{\boldsymbol{0}}$.) Soient x_A, y_A les coordonnées de A par rapport au repère $O\boldsymbol{ab}$, et soient $x_{\boldsymbol{u}}, y_{\boldsymbol{u}}$ les coordonnées de $\boldsymbol{u}$ par rapport à la base $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. (Ainsi, $\overrightarrow{OA} = x_A\boldsymbol{a} + y_A\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{u} = x_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b}$.)

Considérons un point indéterminé M dans P de coordonnées cartésiennes x, y par rapport au repère $O\boldsymbol{ab}$. (Ainsi, $\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$.) Le point M appartient à la droite D si et seulement si il existe un nombre réel t tel que

$$\overrightarrow{AM} = t\boldsymbol{u} \quad \text{(ou, autrement dit : } M = A + t\boldsymbol{u}\text{)}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} = t\boldsymbol{u} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = t\boldsymbol{u} \\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\boldsymbol{u} \\ &\Leftrightarrow \quad x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = (x_A\boldsymbol{a} + y_A\boldsymbol{b}) + t(x_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b}) \\ &\Leftrightarrow \quad x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = (x_A + x_{\boldsymbol{u}}t)\boldsymbol{a} + (y_A + y_{\boldsymbol{u}}t)\boldsymbol{b} \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} x &=& x_A &+& x_{\boldsymbol{u}}t, \\ y &=& y_A &+& y_{\boldsymbol{u}}t. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x &=& x_A &+& x_{\boldsymbol{u}}t, \\ y &=& y_A &+& y_{\boldsymbol{u}}t, \end{array} \right.$$

où $x_A, y_A, x_{\boldsymbol{u}}, y_{\boldsymbol{u}}$ sont des réels connus, x, y sont les coordonnées d'un *point indéterminé*, et t est un *paramètre* réel, est dit une *représentation paramétrique* de D dans le système de coordonnées cartésiennes associé au repère $O\boldsymbol{ab}$.

En général, une *représentation paramétrique* de D dans le système de coordonnées donné est un système de deux équations qui expriment les coordonnées x, y d'un point indéterminé en fonction d'un paramètre t, dont l'ensemble des valeurs admissibles est $\mathbf{R}$ ou un *intervalle* dans $\mathbf{R}$, de manière que :

(1) pour chaque valeur (admissible) du paramètre t, le point de coordonnées x, y données par les équations se trouve sur D ;

(2) pour chaque point sur D, il y a une unique valeur (admissible) du paramètre t qui donne les coordonnées x, y de ce point ;

(3) les valeurs des coordonnées x et y dépendent de la valeur du paramètre t de manière *continue* (par exemple, il suffit que les expressions de x et de y en fonction de t n'utilisent que t, des constantes numériques, et des opérations arithmétiques élémentaires).

Exemple. Posons $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, et soit A le point de coordonnées $(2,\,3)$ par rapport à $O\boldsymbol{ab}$. Alors voici une représentation paramétrique par rapport à $O\boldsymbol{ab}$ de la droite passant par A avec vecteur directeur $\boldsymbol{u}$:

$$\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 3 - t, \end{cases} \qquad t \in \mathbf{R}.$$

En voici une autre :

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2 + 2t - 1}{t}, \\[2ex] y = \dfrac{1 + 3t - t^2}{t}, \end{cases} \qquad t \in \left]0,\,\infty\right[.$$

Exercice. Vérifier le dernier exemple.

I.15. Équation cartésienne d'une droite dans un plan

Soient P un plan (affine) et $O\boldsymbol{ab}$ un repère dans P. (Le plan P muni du repère $O\boldsymbol{ab}$ est donc un plan cartésien.)

Soit D une droite (affine) dans P.

Choisissons un point A sur D, un vecteur directeur $\boldsymbol{u}$ de D, et un vecteur $\boldsymbol{v}$ de P non colinéaire avec $\boldsymbol{u}$. (Autrement dit : $A \in \mathsf{D}$, $\boldsymbol{u} \in \vec{\mathsf{D}}$, $\boldsymbol{u} \neq \vec{\boldsymbol{0}}$, $\boldsymbol{v} \in \vec{\mathsf{P}}$, $\boldsymbol{v} \notin \vec{\mathsf{D}}$.) Ainsi, $A\boldsymbol{u}$ est un repère de D et $A\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$ est un repère de P.

Soient p_O, q_O les coordonnées de O par rapport au repère $A\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$, et soient $p_{\boldsymbol{a}}, q_{\boldsymbol{a}}$ les coordonnées de $\boldsymbol{a}$ et $p_{\boldsymbol{b}}, q_{\boldsymbol{b}}$ les coordonnées de $\boldsymbol{b}$ par rapport à la base $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. (Ainsi, $\overrightarrow{AO} = p_O\boldsymbol{u} + q_O\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a} = p_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{u} + q_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{v}$, et $\boldsymbol{b} = p_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{u} + q_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{v}$.)

Considérons un point indéterminé M dans P de coordonnées cartésiennes x, y par rapport au repère $O\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$. (Ainsi, $\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$.) Soient s, t les coordonnées cartésiennes de M par rapport au repère $A\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$. (Ainsi, $\overrightarrow{AM} = s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$.) Le point M appartient à la droite D si et seulement si $t = 0$, dans quel cas $\overrightarrow{AM} = s\boldsymbol{u}$.

Or,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}\\ &= \overrightarrow{AO} + x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}\\ &= p_O\boldsymbol{u} + q_O\boldsymbol{v} + x(p_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{u} + q_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{v}) + y(p_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{u} + q_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{v})\\ &= (p_O + xp_{\boldsymbol{a}} + yp_{\boldsymbol{b}})\boldsymbol{u} + (q_O + xq_{\boldsymbol{a}} + yq_{\boldsymbol{b}})\boldsymbol{v}.\end{aligned}$$

D'où, $s = p_O + xp_{\boldsymbol{a}} + yp_{\boldsymbol{b}}$ et $t = q_O + xq_{\boldsymbol{a}} + yq_{\boldsymbol{b}}$. Donc, le point M appartient à la droite D si et seulement si

$$q_O + xq_{\boldsymbol{a}} + yq_{\boldsymbol{b}} = 0.$$

L'équation

$$q_O + xq_{\boldsymbol{a}} + yq_{\boldsymbol{b}} = 0,$$

où $q_O, q_{\boldsymbol{a}}, q_{\boldsymbol{b}}$ sont des réels connus, et x, y sont les coordonnées d'un *point indéterminé*, est dite une *équation cartésienne* de D dans le système de coordonnées cartésiennes associé au repère $O\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$.

En général, une *équation cartésienne* de D dans le système de coordonnées cartésiennes donné est une équation avec deux inconnues x, y telle que quel que soit un point de P de coordonnées x, y, ce point appartient à D si et seulement si ses coordonnées satisfont l'équation. On dit aussi dans ce cas que l'équation *définit* la droite dans le système de coordonnées donné.

Exemple. L'équation

$$x + 2y = 3$$

est une équation cartésienne d'une droite. Cette droite passe par le point de coordonnées $(1, 1)$. Le vecteur $2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ est un vecteur directeur de cette droite.

Exercice. Vérifier le dernier exemple.

Proposition. *Soient α, β deux nombres réels pas tous les deux nuls ($(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$), et soit γ un nombre réel arbitraire. Considérons l'équation*

$$\alpha x + \beta y = \gamma, \tag{E}$$

où x, y sont des inconnues. Alors, quel que soit un repère $O\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ d'un plan P, l'équation (E) définit dans P une droite D. En plus, un vecteur appartient à la droite vectorielle $\vec{\mathsf{D}}$ si et seulement si ses coordonnées x, y dans la base $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ satisfont l'équation

$$\alpha x + \beta y = 0. \tag{E_0}$$

Exercice. Prouver cette proposition.

I.16. Déterminant d'un couple de vecteurs dans un plan par rapport à une base

Soit P un plan vectoriel.

Définition. Soit $\mathcal{B} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ une base du plan vectoriel P. À tout couple $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ de vecteurs de P on associe leur *déterminant* par rapport à $\mathcal{B}$, qui est un nombre réel noté « $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ ». L'opération $\det_{\mathcal{B}}$ est complètement déterminée par les identités suivantes, où $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ sont des vecteurs arbitraires de P, et α est un nombre réel arbitraire :

(1) $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ et $\det_{\mathcal{B}}(\alpha\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \alpha \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
(l'opération $\det_{\mathcal{B}}$ est *linéaire en premier argument*),

(2) $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$ et $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \alpha\boldsymbol{v}) = \alpha \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
(l'opération $\det_{\mathcal{B}}$ est *linéaire en deuxième argument*),

(3) $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0$
(l'opération $\det_{\mathcal{B}}$ est *alternée*, en tant qu'une opération *bilinéaire*),

(4) $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B} = 1$.

Proposition. *Cette définition est correcte : pour toute base $\mathcal{B}$ de P, il existe une unique opération $\det_{\mathcal{B}}$ qui à chaque couple de vecteurs de P associe un réel et qui satisfait les quatre propriétés données. En plus, si $\mathcal{B} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ est une base de P, et que*

$$\boldsymbol{u} = x_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{v} = x_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{b}$$

sont deux vecteurs de P avec ${}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{u}] = (x_{\boldsymbol{u}}, y_{\boldsymbol{u}})$ et ${}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{v}] = (x_{\boldsymbol{v}}, y_{\boldsymbol{v}})$, alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = x_{\boldsymbol{u}}y_{\boldsymbol{v}} - y_{\boldsymbol{u}}x_{\boldsymbol{v}}.$$

Esquisse d'une démonstration. Soit $\mathcal{B} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ une base de P.

Montrons d'abord l'unicité : admettons qu'une opération $\det_{\mathcal{B}}$ satisfait les propriétés données dans la définition, et montrons qu'il n'y en a pas d'autres qui satisferaient ces propriétés.

Notons d'abord que

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0, \quad \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 0, \quad \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 1.$$

Puis,

$$0 = \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}),$$

et donc

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = -1.$$

Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux vecteurs arbitraires de P. Soient $(x_{\boldsymbol{u}}, y_{\boldsymbol{u}})$ les coordonnées de $\boldsymbol{u}$ et $(x_{\boldsymbol{v}}, y_{\boldsymbol{v}})$ les coordonnées de $\boldsymbol{v}$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\boldsymbol{u} = x_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{v} = x_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{b}.$$

Alors on peut calculer que

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \det_{\mathcal{B}}(x_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b},\, x_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{b}) = x_{\boldsymbol{u}}y_{\boldsymbol{v}} - y_{\boldsymbol{u}}x_{\boldsymbol{v}}.$$

Par le même calcul, toute opération qui satisfait les propriétés données dans la définition de « $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ » doit avoir $x_{\boldsymbol{u}}y_{\boldsymbol{v}} - y_{\boldsymbol{u}}x_{\boldsymbol{v}}$ pour le résultat si elle est appliquée à $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, et donc elle ne peut pas être différente de $\det_{\mathcal{B}}$.

On a montré l'unicité, il ne reste qu'à montrer qu'une opération avec les propriétés données existe. Pour cela il suffit de définir

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \overset{\text{déf}}{=} x_{\boldsymbol{u}}y_{\boldsymbol{v}} - y_{\boldsymbol{u}}x_{\boldsymbol{v}}, \qquad \text{où} \qquad \boldsymbol{u} = x_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{v} = x_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{b},$$

et de vérifier que les propriétés désirées sont satisfaites. □

L'identité suivante découle des identités données dans la définition de $\det_{\mathcal{B}}$:

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = -\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

(l'opération $\det_{\mathcal{B}}$ est *antisymétrique*, en tant qu'une opération bilinéaire).

Exercice. Démontrer cette identité. Indication : il suffit de vérifier que

$$0 = \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}).$$

Théorème. *Quel que soit une base $\mathcal{B}$ d'un plan vectoriel P, deux vecteur $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de P sont colinéaires si et seulement si* $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$.

Démonstration. Il est facile de vérifier que si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont colinéaires, alors $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$. En effet, si $\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{u}$, alors $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u},\, \alpha\boldsymbol{u}) = \alpha\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0$.

Si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ ne sont pas colinéaires, alors le couple $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ est une base. Soient $(p_{\boldsymbol{a}}, q_{\boldsymbol{a}})$ les coordonnées de $\boldsymbol{a}$ et $(p_{\boldsymbol{b}}, q_{\boldsymbol{b}})$ les coordonnées de $\boldsymbol{b}$ dans la base $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$:

$$\boldsymbol{a} = p_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{u} + q_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{b} = p_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{u} + q_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{v}.$$

Alors on peut calculer :

$$\begin{aligned} 1 = \det_{\mathcal{B}}\mathcal{B} = \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &= \det_{\mathcal{B}}(p_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{u} + q_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{v},\, p_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{u} + q_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{v}) = (p_{\boldsymbol{a}}q_{\boldsymbol{b}} - q_{\boldsymbol{a}}p_{\boldsymbol{b}})\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \\ &= \Big(\det_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}\mathcal{B}\Big)\Big(\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\Big). \end{aligned}$$

D'où, $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \neq 0$. □

Voici quelques identités remarquables satisfaites pour toutes bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et pour tout couple de vecteurs $\mathcal{F}$ dans P :

(1) $(\det_{\mathcal{B}}\mathcal{C})(\det_{\mathcal{C}}\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}\mathcal{F}$,

(2) $(\det_{\mathcal{B}}\mathcal{C})(\det_{\mathcal{C}}\mathcal{B}) = 1$,

(3) $\det_{\mathcal{B}}\mathcal{B} = 1$.

Exercice. Démontrer ces identités.

Application des déterminants à la recherche des équations cartésiennes des droites dans un plan

Soient P un plan affine et D une droite affine dans P passant par un point A avec un vecteur directeur $\boldsymbol{u}$. Alors, quels que soient un point M de P et une base $\mathcal{B}$ de $\vec{\mathsf{P}}$, on a l'équivalence :

$$M \in \mathsf{D} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{AM} \text{ et } \boldsymbol{u} \text{ sont colinéaires} \quad\Leftrightarrow\quad \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AM},\, \boldsymbol{u}) = 0.$$

Si O est un point quelconque, alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AM},\, \boldsymbol{u}) = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA},\, \boldsymbol{u}) = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OM},\, \boldsymbol{u}) - \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OA},\, \boldsymbol{u}).$$

Si $\mathcal{R} = O\boldsymbol{ab}$ est un repère de P, soient (x_M, y_M) les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$:

$$\overrightarrow{OM} = x_M\boldsymbol{a} + y_M\boldsymbol{b}.$$

Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OM},\, \boldsymbol{u}) = \det_{\mathcal{B}}(x_M\boldsymbol{a} + y_M\boldsymbol{b},\, \boldsymbol{u}) = x_M\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}) + y_M\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}).$$

Ainsi on obtient une équation cartésienne de D dans $\mathcal{R}$:

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u})x + \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u})y = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OA},\, \boldsymbol{u}).$$

Jusqu'à ici on n'a supposé aucun rapport entre la base $\mathcal{B}$ le repère $\mathcal{R} = O\boldsymbol{ab}$. Supposons maintenant que $\mathcal{B}$ est la base de $\mathcal{R}$: $\mathcal{B} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Soient (x_A, y_A) les coordonnées de A dans $\mathcal{R} = O\boldsymbol{ab}$ et $(x_{\boldsymbol{u}}, y_{\boldsymbol{u}})$ les coordonnées de $\boldsymbol{u}$ dans $\mathcal{B} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$:

$$\overrightarrow{OA} = x_A\boldsymbol{a} + y_A\boldsymbol{b} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{u} = x_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b}.$$

Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}) = y_{\boldsymbol{u}}, \quad \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}) = -x_{\boldsymbol{u}}, \quad \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OA}, \boldsymbol{u}) = x_A y_{\boldsymbol{u}} - y_A x_{\boldsymbol{u}}.$$

D'où une équation cartésienne de D dans $\mathcal{R}$:

$$y_{\boldsymbol{u}}x - x_{\boldsymbol{u}}y = y_{\boldsymbol{u}}x_A - x_{\boldsymbol{u}}y_A.$$

Considérons maintenant la droite vectorielle $\vec{\mathsf{D}}$ associée à D. Alors quel que soit un vecteur $\boldsymbol{v}$ de $\vec{\mathsf{P}}$, on a l'équivalence :

$$\boldsymbol{v} \in \vec{\mathsf{D}} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{v} \text{ et } \boldsymbol{u} \text{ sont colinéaires} \quad \Leftrightarrow \quad \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = 0.$$

On peut en déduire une équation cartésienne de $\vec{\mathsf{D}}$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$y_{\boldsymbol{u}}x - x_{\boldsymbol{u}}y = 0.$$

I.17. Orientations

Pour concevoir l'idée d'une *orientation* d'un espace affine, considérons des petites *bêtes affines*. Par exemple, on peut travailler avec des *mouches affines*, qui sont des mouches de taille d'un point qui habitent un espace affine. (À la place de mouches, on peut travailler avec des abeilles ou avec des moustiques.)

Considérons d'abord une droite affine et deux mouches qui habitent cette droite. Admettons que les mouches s'appellent Amélie et Benjamin. Soient A et B deux points distincts de la droite. Supposons qu'à un certain moment, Amélie se trouve au point A, et Benjamin – au point B.

Si Amélie et Benjamin tentent d'échanger leurs places sans quitter la droite, elles seront obligées à se croiser à un certain moment, c'est-à-dire, à passer par un même point au même moment.

En revanche, si C et D sont n'importe quels deux points distincts de la même droite, Amélie et Benjamin peuvent se déplacer des points A, B aux points C, D sans se croiser, tant qu'elles peuvent choisir qui prend quel point (soit Amélie arrive au point C et Benjamin au point D, soit Benjamin au point C et Amélie au point D).

En fait, si le *sens* du vecteur $\overrightarrow{CD}$ est le même que celui du vecteur $\overrightarrow{AB}$, et que Amélie se déplace de A vers C, alors Benjamin peut simultanément se déplacer de B vers D sans croiser Amélie. Si, au contraire, le sens du vecteur $\overrightarrow{CD}$ est *opposé* au sens du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (et donc le même que le sens du vecteur $\overrightarrow{BA}$), et que Amélie se déplace de A vers D, alors Benjamin peut simultanément se déplacer de B vers C sans croiser Amélie.

Considérons maintenant un plan affine et trois mouches qui l'habitent. Admettons que les mouches s'appellent Abraham, Béatrice et Charlemagne. Soient A, B et C trois points non alignés du plan. Supposons qu'à un certain moment, Abraham se trouve au point A, Béatrice – au point B, et Charlemagne – au point C.

Si Abraham et Béatrice tentent d'échanger leurs places sans quitter le plan, alors que Charlemagne se promène un peu dans le plan avant de rentrer au point C, les trois mouches seront obligées à se trouver alignées à un certain moment, c'est-à-dire, à se trouver sur une même droite au même moment.

En revanche, si Abraham veut aller au point B, Béatrice veut aller au point C, et Charlemagne veut aller au point A, elles peuvent le faire sans jamais se trouver alignées.

Considérons enfin un espace affine à trois dimensions et quatre mouches qui l'habitent. Admettons que les mouches s'appellent Anaïs, Benoît, Caroline et Daniel. Soient A, B, C et D quatre points non coplanaires de l'espace. Supposons qu'à un certain moment, Anaïs se trouve au point A, Benoît – au point B, Caroline – au point C, et Daniel – au point D.

Si Anaïs et Benoît tentent d'échanger leurs places sans quitter l'espace, alors que Caroline et Daniel se promènent un peu dans l'espace avant de rentrer chacune à sa place, les quatre mouches seront obligées, à un certain moment, à se trouver sur un même plan.

En revanche, il est possible, par exemple, pour les quatre mouches de se déplacer simultanément dans l'espace de manière que :

(1) elles ne se trouvent jamais sur un même plan au même moment,

(2) Anaïs se déplace de A à B, Benoît se déplace de B à A, Caroline se déplace de C à D, et Daniel se déplace de D à C.

On va maintenant traiter les phénomènes analogiques dans les espaces vectoriels. Comme c'est un sujet assez avancé, on ne va pas donner toutes le démonstration, ni toute les définitions exactes. En particulière, on va se servir sans définition de la notion d'une fonction *continue* à valeurs dans un espace vectoriel.

Définissons d'abord les *orientations* d'une droite vectorielle.

Définition. Les *orientations* d'une droite vectorielle V peuvent être définies ainsi :

(1) tout vecteur non nul de V détermine une *orientation* de V,

(2) deux vecteurs non nuls $\boldsymbol{a}_0$ et $\boldsymbol{a}_1$ de V déterminent la même *orientation* de V si et seulement si il existe une fonction continue $\boldsymbol{a}\colon [0,\,1] \to \mathsf{V}$ telle que $\boldsymbol{a}(0) = \boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{a}(1) = \boldsymbol{a}_1$, et que $\boldsymbol{a}(t) \neq \vec{\boldsymbol{0}}$ pour tout $t \in [0,\,1]$.

(3) toute *orientation* de V est déterminée par un vecteur non nul de V.

On peut démontrer la proposition suivante :

Proposition. *Soient* V *une droite vectorielle et* $\boldsymbol{a}$ *un vecteur non nul de* V. *Alors :*

(1) *l'orientation déterminée par le vecteur $-\boldsymbol{a}$ est différente de celle déterminée par le vecteur $\boldsymbol{a}$,*

(2) *l'orientation déterminée par un n'importe quel vecteur non nul de V est soit la même que celle déterminée par $\boldsymbol{a}$, soit la même que celle déterminée par $-\boldsymbol{a}$.*

Autrement dit, toute droite vectorielle admet exactement deux orientations différentes, et les orientations déterminées par deux vecteurs opposés non nuls sont différentes.

Définition. Les deux orientations différentes d'une droite vectorielle sont dites *opposées* l'une de l'autre.

On peut démontrer le théorème suivant :

Théorème. *Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non nuls d'une droite vectorielle V. Alors :*

(1) *les orientations déterminées par les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont identiques si et seulement si*

$$\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} > 0,$$

(2) *les orientations déterminées par les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont opposées si et seulement si*

$$\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} < 0.$$

Définition. Une *droite vectorielle orientée* est une droite vectorielle munie d'un choix d'une de ses deux orientations. L'orientation choisie est dite *positive*, et l'autre (l'orientation opposée) est dite *négative*.

Définition. Une *droite affine orientée* est une droite affine munie d'un choix d'une des deux orientations de sa droite vectorielle associée. L'orientation choisie est dite *positive*, et l'autre (l'orientation opposée) est dite *négative*.

Rappelons-nous qu'une base d'une droite vectorielle est composée d'un vecteur non nul. Ainsi, toute base d'une droite vectorielle détermine une orientation de cette droite.

Définition. Une base d'une droite vectorielle orientée est dite *directe* si elle détermine l'orientation positive, et elle est dite *indirecte* dans le cas contraire, c'est-à-dire, si elle détermine l'orientation négative.

Rappelons-nous qu'un repère d'une droite affine est composé d'un point (l'origine du repère) et d'un vecteur non nul (qui constitue une base). Ainsi, tout repère d'une droite affine détermine une orientation de cette droite (ainsi que de sa droite vectorielle associée).

Définition. Un repère d'une droite affine orientée est dite *direct* s'il détermine l'orientation positive, et il est dite *indirect* dans le cas contraire, c'est-à-dire, s'il détermine l'orientation négative.

Définissons maintenant les *orientations* d'un plan vectoriel.

Définition. Les *orientations* d'un plan vectoriel V peuvent être définies ainsi :

(1) toute base de V détermine une *orientation* de V,

(2) deux bases $(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{b}_0)$ et $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1)$ de V déterminent la même *orientation* de V si et seulement si il existe deux fonctions continues $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\colon [0,\,1] \to \mathsf{V}$ telles que $\boldsymbol{a}(0) = \boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{a}(1) = \boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}(0) = \boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{b}(1) = \boldsymbol{b}_1$, et que $(\boldsymbol{a}(t),\, \boldsymbol{b}(t))$ est une base de V pour tout $t \in [0,\,1]$.

(3) toute *orientation* de V est déterminée par une base de V.

On peut démontrer la proposition suivante :

Proposition. *Soient V un plan vectoriel et $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ une base de V. Alors :*

(1) *l'orientation déterminée par la base $(-\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b})$ est la même que celle déterminée par la base $(\boldsymbol{a},\, -\boldsymbol{b})$, mais elle est différente de celle déterminée par la base $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$,*

(2) *l'orientation déterminée par une n'importe quelle base de V est soit la même que celle déterminée par $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, soit la même que celle déterminée par $(-\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b})$.*

Autrement dit, tout plan vectoriel admet exactement deux orientations différentes, et si dans une base on remplace un vecteur par son opposé, l'orientation de la base change.

Définition. Les deux orientations différentes d'un plan vectoriel sont dites *opposées* l'une de l'autre.

On peut démontrer le théorème suivant :

Théorème. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux bases d'un plan vectoriel V. Alors :*

(1) *les orientations déterminées par les bases $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont identiques si et seulement si*

$$\det_{\mathcal{A}} \mathcal{B} > 0,$$

(2) *les orientations déterminées par les bases $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont opposées si et seulement si*

$$\det_{\mathcal{A}} \mathcal{B} < 0.$$

Définition. Un *plan vectoriel orienté* est un plan vectoriel muni d'un choix d'une de ses deux orientations. L'orientation choisie est dite *positive*, et l'autre (l'orientation opposée) est dite *négative*.

Définition. Un *plan affine orienté* est un plan affine muni d'un choix d'une des deux orientations de son plan vectoriel associé. L'orientation choisie est dite *positive*, et l'autre (l'orientation opposée) est dite *négative*.

Définition. Une base d'un plan vectoriel orienté est dite *directe* si elle détermine l'orientation positive, et elle est dite *indirecte* dans le cas contraire, c'est-à-dire, si elle détermine l'orientation négative.

Un repère d'un plan affine est composé d'un point (l'origine du repère) et d'une base du plan vectoriel associé. Ainsi, tout repère d'un plan affine détermine une orientation de ce plan (ainsi que de son plan vectoriel associé).

Définition. Un repère d'un plan affine orienté est dite *direct* s'il détermine l'orientation positive, et il est dite *indirect* dans le cas contraire, c'est-à-dire, s'il détermine l'orientation négative.

Pour clarifier le rapport entre la notion de l'orientation et les déplacements de mouches affines (s'il n'est pas déjà clair), considérons trois mouches affines : Oscar, Alice, et Bernard, qui habitent un plan affine. Soient O_0, O_1, A_0, A_1, B_0 et B_1 six points dans ce plan tels que les points O_0, A_0, B_0 ne sont pas alignés, et que les points O_1, A_1, B_1 ne sont pas alignés non plus. Posons $\boldsymbol{a}_0 = \overrightarrow{O_0A_0}$, $\boldsymbol{a}_1 = \overrightarrow{O_1A_1}$, $\boldsymbol{b}_0 = \overrightarrow{O_0B_0}$ et $\boldsymbol{b}_1 = \overrightarrow{O_1B_1}$. Ainsi, $O_0\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{b}_0$ et $O_1\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1$ sont deux repères du plan habité par les mouches.

Supposons qu'à un certain moment, Oscar se trouve au point O_0, Alice – au point A_0, et Bernard – au point B_0, et que Oscar veut aller au point O_1, Alice – au point A_1, et Bernard – au point B_1, et que les trois mouches ne veulent jamais se trouver alignées. Alors elle peuvent le faire simultanément si et seulement si l'orientation déterminée par la base $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1)$ est la même que celle déterminée par la base $(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{b}_0)$.

On définit de manière similaire les *orientations* d'un espace vectoriel à trois dimensions, ainsi que les orientations d'un espace vectoriel à un n'importe quel nombre fini de dimensions. Il y a toujours deux orientations différentes, qui sont dites *opposées* l'une de l'autre. Un *espace vectoriel orienté* est un espace vectoriel muni d'un choix d'une de ses deux orientations, et un *espace affine orienté* est un espace affine muni d'un choix d'une des deux orientations de son espace vectoriel associé.

Voici, par exemple, une définition des *orientations* d'un espace vectoriel tridimensionnel :

Définition. Les *orientations* d'un espace vectoriel tridimensionnel V peuvent être définies ainsi :

(1) toute base de V détermine une *orientation* de V,

(2) deux bases $(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{c}_0)$ et $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}_1)$ de V déterminent la même *orientation* de V si et seulement si il existe trois fonctions continues $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\colon [0,\, 1] \to \mathsf{V}$ telles que $\boldsymbol{a}(0) = \boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{a}(1) = \boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}(0) = \boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{b}(1) = \boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{c}(0) = \boldsymbol{c}_0$, $\boldsymbol{c}(1) = \boldsymbol{c}_1$, et que $(\boldsymbol{a}(t),\, \boldsymbol{b}(t),\, \boldsymbol{c}(t))$ est une base de V pour tout $t \in [0,\, 1]$.

(3) toute *orientation* de V est déterminée par une base de V.